⋆⋆ *Chapitre 1 : Calcul matriciel* ⋆⋆

1 Notion de matrices

1.1 Premières définitions et vocabulaire

Définition.

On appelle matrice à n lignes et à p colonnes , un tableau à n lignes et à n colonnes , qui contient donc np éléments et dont la taille est $n \times p$.

Exemple.
$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes .

.

Vocabulaire. • Une matrice qui a le même nombre de lignes que de colonnes est appelée matrice carrée

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité de dimension 2
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité de dimension 3
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne .
- $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale (seuls les coefficients placés sur la diagonale sont non nuls)
- $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure .
- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est la matrice nulle .

1.2 Calculs avec des matrices

Définition.

Pour additionner (ou soustraire) deux matrices de même dimension , on ajoute (ou soustrait) les coefficients correspondants .

Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Définition.

Pour multiplier une matrice par un réel k , on multiplie chaque coefficient par k .

Exemple.
$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Définition.

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + ... + a_{1n} \times b_{n1} \end{pmatrix} .$$

Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 8 \times 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \end{pmatrix}$$

Définition.

Pour multiplier deux matrices de dimensions compatibles , on applique le procédé précédent

Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 8 \times 3 & 1 \times 3 + 8 \times 5 \\ 3 \times 2 + 5 \times 3 & 3 \times 3 + 5 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 43 \\ 21 & 34 \end{pmatrix}$$

Propriété.

A , B et C sont des matrices de dimensions compatibles .

$A(B+C) = AB + AC$: distributivité

$(AB)C = A(BC)$: associativité

$IA = AI = A$ où I est la matrice unité .

La multiplication n'est pas commutative , c'est à dire qu'en général , $AB \neq BA$

2 Inversion de matrices

2.1 Matrice inversible

Définition.

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible si et seulement s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I$ où I est la matrice unité d'ordre n .

En Terminale , on travaille exclusivement avec des matrices de taille 2×2 ou 3×3 .

Définition.

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le réel : $ad - bc$

Le déterminant d'une matrice 3×3 se détermine à la calculatrice .

Propriété.

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible si et seulement son déterminant est non nul .

Propriété.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible , alors son inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

L'inverse d'une matrice 3×3 se détermine à la calculatrice .

2.2 Application aux systèmes linéaires

Propriété.

Le système $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre n et X et B des matrices colonnes d'ordre n , est équivalent au système $X = A^{-1}B$

Exemple.

On veut résoudre : $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 12 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. On détermine A^{-1} à la calculatrice et on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & -0,4 & 3,4 \\ 0,4 & 0,6 & -2,6 \\ 0,2 & -0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$