DS 4 Terminale S exercice 2

Partie A

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons que pour tout naturel p tel que $u_p > 1$.

   $\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} = \dfrac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \dfrac{(3+u_p)+(2u_p-2)}{3+u_p} = 1+2\dfrac{u_p-1}{3+u_p}$.

   Par hypothèse de récurrence on a :

   $u_p - 1$ et comme $u_p > 1$, $3+u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\dfrac{1}{3+u_p} > 0$ et finalement $\dfrac{u_p-1}{3+u_p} > 0$, c'est-à-dire que $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$

   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

2. (a) Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   (b) On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1-u_n^2 < 0$ et comme $3+u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. (a) $V_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} = \dfrac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \dfrac{-0,5\,(u_n-1)}{1,5\,(u_n+1)} = -\dfrac{1}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   (b) On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.

   On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

(b) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n\left(u_n + 1\right) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff$ $v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n\left(v_n - 1\right) = -1 - v_n$ et comme $v_n \neq 1$, $u_n = \dfrac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

(c) Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.