Corrigé DS n° 4

Exercice 1 ***10 points***

Partie A

1) On a : *1 point*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} 2x-7 = +\infty \; donc \; \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \; et \; \lim_{x\to-\infty} 2x-7 = -\infty \; donc \; \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

2) On a : *1 point*

$g'(x) = 2e^x + 2 > 0$ car $e^x > 0$ donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
g(x)			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	

3) La fonction g est continue comme somme de fonction exponentielle et de polynôme (ou car dérivable) ; g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 0 appartient bien à $\mathbb{R}$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $\mathbb{R}$ tel que g(a) = 0 .De plus g(0,94) = -0,00003< 0 et g(0,941) = 0,007 > 0 donc g(0,94) < g(a) < g(0,941) et 0,94 < a < 0,941 *1,5 points*
4) En plaçant a dans le tableau de variation de g , on obtient par lecture : si x < a , alors g(x) < 0 et si x > a alors g(x) > 0 . *0,5 point*

Partie B

1) On a :

$$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$		0		5/2		$+\infty$
2x-5		-		-	0	+	
$1-e^{-x}$		-	0	+		+	
f(x)		+	0	-	0	+	

1 point

2) On a *1 point*

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-5 = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1 \; donc \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x-5 = -\infty \; et \; \lim_{x\to-\infty} 1-e^{-x} = -\infty \; donc \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

3) On a :

Corrigé DS n° 4

$$f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + (2x - 5)(e^{-x}) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} = 2 + 2xe^{-x} - 7e^{-x}$$
$$= \frac{2e^{x} + 2x - 7}{e^{x}} = \frac{g(x)}{e^{x}}$$

Or $e^{x} > 0$ donc f '(x) est du signe de g(x)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	f(a)	$\nearrow$	$+\infty$

1,5 points

4) a) on a :

$$g(a) = 0 \; donc \; e^{a} = \frac{7 - 2a}{2} \; et \; e^{-a} = \frac{2}{7 - 2a} \, donc$$

$$f(a) = (2a - 5)(1 - e^{-a}) = (2a - 5)(1 - \frac{2}{7 - 2a}) = \frac{2a - 5}{7 - 2a}(7 - 2a - 2) = \frac{(2a - 5)^2}{2a - 7}$$

1 point

b) on a :

On a h(0,94) = -1,90 , h(0,941) = -1,89 donc -1,9 < f(a) < -1,89   *0,5 point*

5) On a : *1 point*

Corrigé DS n° 4