

**Exercice 1 (10 points)**

**A. Étude d'une fonction auxiliaire.**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = e^x(1 - x) + 1.$$

1.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$g'(x) = e^x(1 - x) - e^x = -xe^x$  qui est du signe  $-x$  ; donc

- Sur  $] -\infty ; 0[$ ,  $g'(x) > 0$ , donc  $g$  est croissante ;
- Sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) < 0$ , donc  $g$  est décroissante.
- $g'(0) = 0$  ;  $g$  a donc un maximum en 0 :  $g(0) = 1 + 1 = 2$ .

2. l'intervalle  $[1,27 ; 1,28]$  est inclus dans  $]0 ; +\infty[$ , donc  $g$  est décroissante sur cet intervalle et

$$g(1,27) \approx 0,039 \text{ et } g(1,28) \approx -0,007.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires  $g$  étant continue sur l'intervalle  $s'$ annule une seule fois en  $\alpha \in [1,27 ; 1,28]$ . Donc  $g(\alpha) = 0$ .

3. On a  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .

Donc  $g$  est croissante de 1 à  $g(0) = 2$  :  $g$  est donc positive sur  $] -\infty ; 0[$ . D'après la question précédente  $g(x) > 0$  sur  $]0 ; \alpha[$  et  $g(x) < 0$  sur  $] \alpha ; +\infty[$ .

**B. Étude de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$ .**

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.

2. (a) On a  $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} + 1$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

(b) Calculons  $d(x) = f(x) - (x + 2) = \frac{x}{e^x + 1} + 2 - (x + 2) = \frac{x}{e^x + 1} - x = x \left[ \frac{1}{e^x + 1} - 1 \right] = \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-xe^x}{e^x + 1} = \frac{-x}{1 + e^{-x}}$ .

Pour  $x < 0$ , le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc  $d(x) > 0$ , ce qui signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $d$

3. (a) Sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

Le dénominateur est supérieur à 1, donc supérieur à 0 : le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g$  vu dans la partie A.

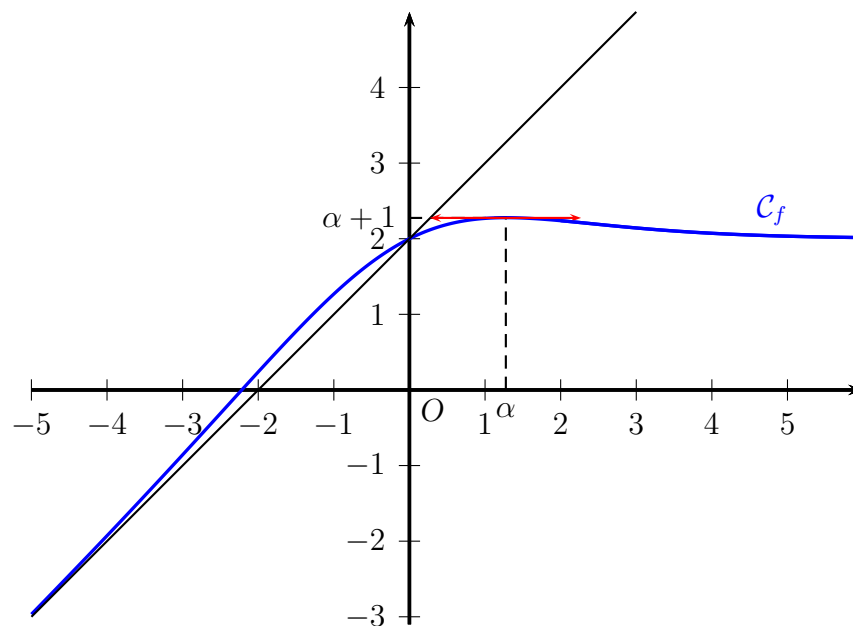
On a donc  $f'(x) > 0$  sur  $] -\infty ; \alpha[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $] \alpha ; +\infty[$ .

(b) On sait que  $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha(1 - \alpha) + 1 = 0 \iff e^\alpha(1 - \alpha) = -1 \iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ .

$$\text{Donc } f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 2 = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} + 2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 + \alpha - 1} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1.$$

(c) Des questions précédentes on déduit que  $f$  est croissante sur  $] -\infty ; \alpha[$  de moins l'infini à  $\alpha + 1$  et décroissante sur  $] \alpha ; +\infty[$  de  $\alpha + 1$  à 2.

4.



### Exercice 2 Partie A

1. Résolution de  $z^2 - 2z + 4 = 0$

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z - 1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z - 1)^2 + 3 = 0$$

$$\iff (z - 1)^2 - (i\sqrt{3})^2 = 0 \iff (z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3}) = 0.$$

Les solutions sont donc les complexes :  $z' = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z'' = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Écriture exponentielle**

$$|z'|^2 = 1 + 3 = 2^2 \Rightarrow |z'| = 2.$$

Donc  $z' = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

De même  $z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

2. En utilisant l'écriture exponentielle :

$$\left( 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{2004} = 2^{2004} e^{668i\pi} = 2^{2004}.$$

### **Partie B**

1. L'affixe de A est  $z'$  dont le module est égal à 2 ; donc  $OA = 2$  ; de même l'affixe de B est  $z''$  qui a le même module : donc  $OB = 2$ .

Conclusion A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

2. On a donc  $z_{O'} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ .

Et  $z_{B'} = i(1 + i\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ .

3. (a) La droite (AI) semble être la hauteur issue de A dans le triangle  $O'AB'$ .

(b) I est le milieu de  $[OB]$ , donc  $z_I = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Donc  $z_{\overrightarrow{AI}} = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

D'autre part  $z_{\overrightarrow{O'B'}} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - i$ .

(c) Le repère étant orthonormé on peut calculer :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{O'B'} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Les vecteurs étant orthogonaux, les droites (AI) et ( $O'B'$ ) sont perpendiculaires ; donc la droite (AI) est bien hauteur dans le triangle  $O'AB'$ .

