corrigé DS 2 Terminale S octobre 2019

Exercice 1 **10 points**

Partie A :

1. *0,5 point* $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = -2\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. (a) *1,5 points* Développons :
   $\left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right) = z^3 + az^2 + bz - z^2\mathrm{i}\sqrt{2} - az\mathrm{i}\sqrt{2} - b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3 + \left(a - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - b\mathrm{i}\sqrt{2}$.
   Par identification avec l'énoncé, on obtient :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a - \mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2 - \mathrm{i}\sqrt{2} \\ b - a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b + 2\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b & = & 2 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$
   On a donc $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$

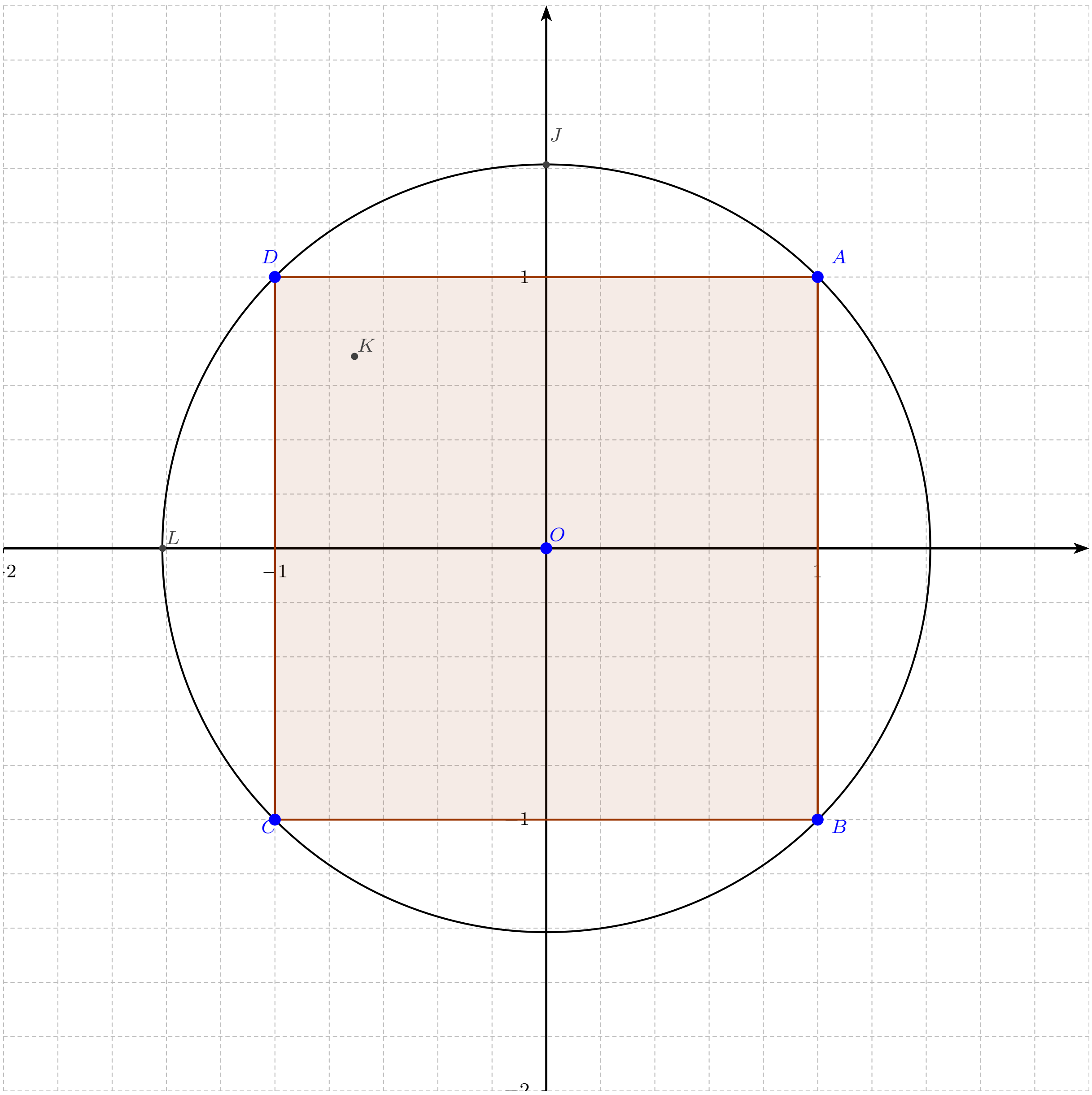
   (b) *1,5 points* En utilisant la factorisation précédente :
   $$P(z) = 0 \iff \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 - 2z + 2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z - \mathrm{i}\sqrt{2} & = & 0 \\ z^2 - 2z + 2 & = & 0 \end{array}\right.$$
   On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :
   $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff$
   $$(z-1)^2 = -1 \iff (z-1)^2 = \mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z - 1 & = & \mathrm{i} \\ z - 1 & = & -\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1 + \mathrm{i} \\ z & = & 1 - \mathrm{i} \end{array}\right.$$
   Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}$.

Partie B :

1. (a) *1 point* $|z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
   $cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$
   On a donc $z_A = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

   (b) *0,5 point* $z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. *0,5 point* Figure



3. *1,5 points* K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en coordonnées par :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_{\mathrm{K}} & = & \dfrac{1}{2}\left(x_{\mathrm{J}}+x_{\mathrm{L}}\right) \\ y_{\mathrm{K}} & = & \dfrac{1}{2}\left(y_{\mathrm{J}}+y_{\mathrm{L}}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & = & \dfrac{1}{2}\left(0+x_{\mathrm{L}}\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & = & \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+y_{\mathrm{L}}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_{\mathrm{L}} & = & -\sqrt{2} \\ y_{\mathrm{L}} & = & 0 \end{array}\right.$$

Conclusion : $z_{\mathrm{L}}=-\sqrt{2}$.

4. *1,5 points* On a $\left|z_{\mathrm{A}}\right|^2=1^2+1^2=2$

$\left|z_{\mathrm{B}}\right|^2=1^2+(-1)^2=2$

$\left|z_{\mathrm{J}}\right|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

$\left|z_{\mathrm{L}}\right|^2=\left(-\sqrt{2}\right)^2=2.$

On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

5. *1,5 points* $z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} z_{\text{L}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) = -1 - \text{i}$. On a successivement : $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2} = 0$ donc O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;

   AB=BC =CD =AD= 2, donc ABCD est un losange ; AC = BD = $2\sqrt{2}$ donc ABCD est un carré .

Exercice 2 **10 points**

Partie A

1. L'algorithme 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.

   L'algorithme 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.

   L'algorithme 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.

2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.

3. (a) Montrons par récurrence la propriété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
   Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6 - v_n} < \dfrac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   $\dfrac{3}{2}\dfrac{9}{6} < \dfrac{9}{6 - v_n} < \dfrac{9}{3} = 3$.
   Ainsi $1 < \dfrac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
   Conclusion
   Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - v_n\left(6 - v_n\right)}{6 - v_n} = \dfrac{\left(v_n - 3\right)^2}{6 - v_n}$.
   Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\left(v_n - 3\right)^2}{6 - v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

Partie B

1. $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{v_{n+1}-3}-\dfrac{1}{v_n-3}=\dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3}-\dfrac{1}{v_n-3}=\dfrac{6-v_n}{3v_n-9}-\dfrac{1}{v_n-3}=\dfrac{6-v_n-3}{3v_n-9}=\dfrac{-v_n+3}{3v_n-9}=-\dfrac{v_n-3}{3\left(v_n-3\right)}=-\dfrac{1}{3}$.

   Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r=-\dfrac{1}{3}$.

2. $w_n=w_0+nr=\dfrac{1}{1-3}-\dfrac{1}{3}n=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}n$.

   Comme $w_n=\dfrac{1}{v_n-3}$, on a $v_n=\dfrac{1}{w_n}+3=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n}+3=\dfrac{6}{-3-2n}+3$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6}{-3-2n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3$.