Corrigé DS n° 1 TS

Exercice 1 *6 points*

1) $f'(x) = 3x^2 - 5 = 3\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

On en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5/3}$		$\sqrt{5/3}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	6,3	↘	-2,3	↗	

2 points

2) $f(x) = (x-2)(x^2+ax+b) = x^3 + (a-2)x^2 + (b-2a)x - 2b$

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ b - 2a = -5 \\ -2b = 2 \end{cases} \text{ donc } a = 2 \text{ et } b = -1$$

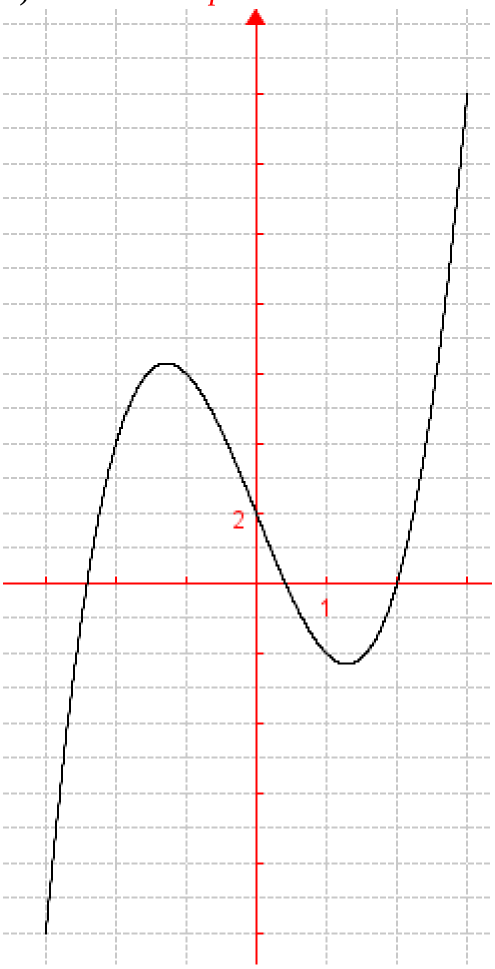
$f(x) = (x-2)(x^2+2x-1)$ *1,5 points*

3) Etudions le signe de $x^2 + 2x - 1$: $\Delta = 8$ donc $x' = -1-\sqrt{2}$, $x'' = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x – 2		-		-		-	0	+	
x² 2x – 1		+	0	-	0	+		+	
f(x)		-	0	+	0	-	0	+	

$S = \left]-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$ *1,5 points*

4) Courbe *1 point*



Corrigé DS n° 1 TS

Exercice 2 *6 points*

Partie A

1) $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 6$ *1 point*
2) Cet algorithme permet de savoir au bout de combien d'années, le stock va atteindre 100 000 exemplaires . *1 point*
3) On obtient n = 27 *1 point*

Partie B

1) Il faut modifier la ligne « U prend la valeur $0{,}95U + 4$ » *1 point*
2) $w_{n+1} = 0{,}95v_n + 4 - 80 = 0{,}95(v_n - 80) = 0{,}95w_n$. La suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = -38$ *1 point*
3) $w_n = -38 \times 0{,}95^n$ *1 point*

Exercice 3 *8 points*

$$1)\ f'(x) = \frac{3(x+3) - (3x+2)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

La fonction f est donc croissante . *1 point*

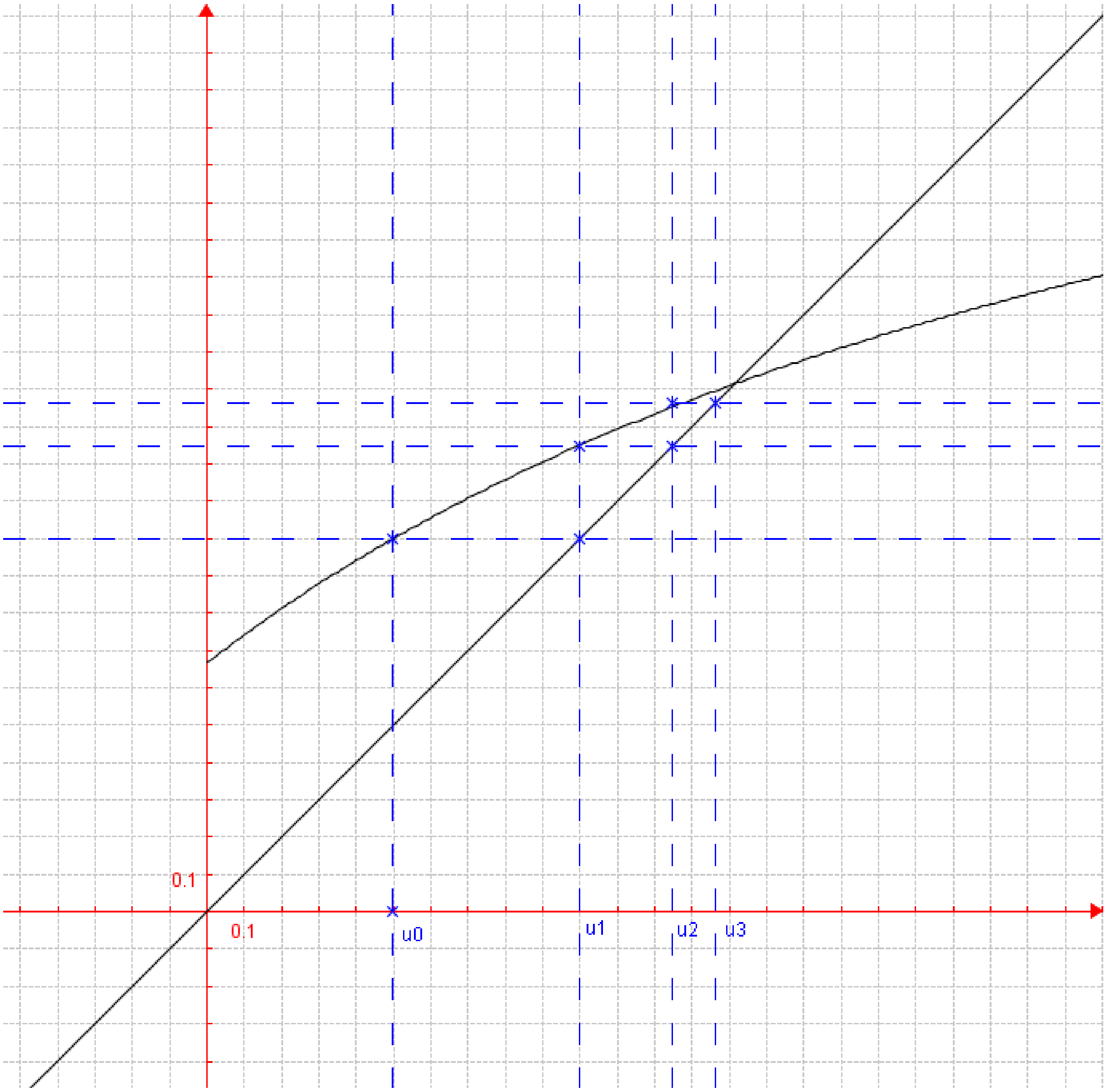
2) On a : *1 point*

$$f(x) = x \iff \frac{3x + 2 - x^2 - 3x}{x+3} = 0 \iff -x^2 + 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Or f est définie sur $[0; +\infty[$ donc $x = \sqrt{2}$

3) Graphique : *1,5 points*

Corrigé DS n° 1 TS



4) Il semble que la suite soit croissante *0,5 point*
5) On a : *1 point*

$u_n < \sqrt{2}$ donc $2 - u_n^2 > 0$; de façon évidente , $u_n > 0$ donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{u_n + 3} > 0$$

Donc la suite est croissante .

6) On a : *1 point*

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{\frac{3u_n+2}{u_n+3}+\sqrt{2}}{\frac{3u_n+2}{u_n+3}-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})u_n+2+3\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})u_n+2-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{2})\left(u_n+\frac{2+3\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})}\right)}{(3-\sqrt{2})\left(u_n+\frac{2-3\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})}\right)}=\frac{(3+\sqrt{2})\left(u_n+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{(3+\sqrt{2})}\right)}{(3-\sqrt{2})\left(u_n+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{(3-\sqrt{2})}\right)}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})}\times\frac{u_n+\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})}v_n$$

La suite (v_n) est donc bien géométrique de raison $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ et de premier terme $v_0=\frac{0,5+\sqrt{2}}{0,5-\sqrt{2}}$

7) On a : *1 point*

$$v_n=v_0\times q^n=\frac{0,5+\sqrt{2}}{0,5-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)^n$$

Exprimons d'abord u_n en fonction de v_n

$$v_n=\frac{u_n+\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}\Leftrightarrow v_n(u_n-\sqrt{2})=u_n+\sqrt{2}\Leftrightarrow v_nu_n-\sqrt{2}v_n=u_n+\sqrt{2}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)$$

$$=\sqrt{2}(1+v_n)\Leftrightarrow u_n=\frac{\sqrt{2}(1+v_n)}{v_n-1}$$

$$u_n=\frac{\sqrt{2}\left(1+\frac{0,5+\sqrt{2}}{0,5-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)^n\right)}{\frac{0,5+\sqrt{2}}{0,5-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\right)^n-1}\qquad 1\ point$$