DS 3 Terminale S 21 novembre 2019

Exercice 1 (10 points)
A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1 - x) + 1.}$$

1. *Étudier le sens de variation de g.*
2. *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,27 ; 1,28] ; on note α cette solution.*
3. *Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$*

B. Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x} + 1} + 2.}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. *Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.*
2. (a) *Déterminer la limite de f en $-\infty$.*
   (b) *Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (d) d'équation $y = x + 2$*
3. (a) *Calculer f'(x).*
   (b) *Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$*
   (c) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
4. *Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d dans le repère .*

Exercice 2 (10 points)
Partie A

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :*

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. *Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.*

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ *; (unité graphique : 2 cm).*

1. *Montrer que les points A d'affixe* $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ *et B d'affixe* $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ *sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.*

   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. *On note O' le point d'affixe* $z_{O'} = -i(z_O - z_A) + z_A$ *et on note B' le point d'affixe* $z_{B'} = i(z_B - z_A) + z_A$

   Calculer les affixes des points O' *et* B' *et construire ces points.*

3. *Soit I le milieu du segment [OB].*

   (a) *Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle* $AO'B'$ *?*

   (b) *Calculer l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AI}$.

   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ *est égale à* $3\sqrt{3} - i$.

   (c) *La conjecture émise à la* **question a** *est-elle vraie ?.*