DS n° 2 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1-\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. **a.** Ecrire z_A sous forme exponentielle .

b. Ecrire z_K sous forme algébrique .

2. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

3. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

4. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$ .Soit C le point tel que $z_C = e^{\frac{i\pi}{4}} z_L$ .Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **10 points**

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

En déduire le sens de variations de la suite (v_n) .

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).