
NOM

Prénom

Exercice 1 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x + 2$$

- 1) Etudier les variations de f
- 2) Déterminer a et b tels que : $f(x) = (x - 2)(x^2 + ax + b)$
- 3) En déduire les solutions de l'équation $f(x) > 0$
- 4) Tracer la courbe de f sur $[-3 ; 3]$

Exercice 2 (6 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6000 ouvrages neufs. On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année $(2013+n)$. On donne $u_0 = 42$.

- 1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
- 2) On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables :
U, N
Initialisation :
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N
Traitement :
Tant que $U < 100$
 U prend la valeur $U \times 0,95 + 6$
 N prend la valeur $N + 1$
Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.

- 3) À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année $(2013+n)$.

- 1) Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
- 2) On admet que $v_{n+1} = 0,95v_n + 4$ avec $v_0 = 42$
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n , par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0 .

- 3) Exprimer w_n en fonction de n .

Exercice 3 (8 points)

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

On définit la fonction f sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x + 3}$$

- 1) Etudier les variations de f
- 2) Résoudre $f(x) = x$
- 3) Sur l'annexe, on a représenté la courbe de f et la droite d'équation $y = x$. Placer u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant les traits de construction apparents.
- 4) Conjecturer les variations de la suite (u_n)
- 5) On admet que $u_n < \sqrt{2}$. Démontrer votre conjecture
- 6) On définit maintenant la suite (v_n) par :

$$v_n = \frac{u_n + \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme

- 7) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n

