Baccalauréat blanc

Epreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

Sujet obligatoire

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 **5 points**

Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

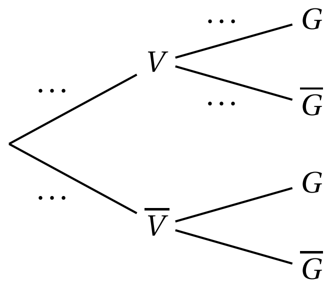
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Partie C

1. On admettra, comme pré-requises, les propriétés suivantes :
   — Pour tout événement A, $P(\text{A}) + P\left(\overline{\text{A}}\right) = 1$;
   — La formule de probabilité totale ;
   — Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

   Démontrer que si les événements A et B sont indépendants alors les événements $\overline{\text{A}}$ et B le sont également.
2. Deux souches du virus de la grippe circulent : la souche A (H3N3) et la souche B (H1N2), cette souche B entraîne des complications plus sévères que la souche A.

   On a évalué que, sur la population non vaccinée, 22% sera infectée par la souche A de la grippe au cours de l'hiver et 15% par la souche B. On choisit une personne au hasard dans la population non vaccinée et on admet que les événements A : "la personne sera infectée par la souche A" et B : la personne sera infectée par la souche B" sont indépendants.

   Quelle est la probabilité qu'une personne choisie dans la population non vaccinée sera infectée au cours de l'hiver par la souche A mais pas par la souche B ?

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
   Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

EXERCICE 3 **5 points**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

   b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

   c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

3. **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

   b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0\,;\,4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

   On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\ ;\ +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
   On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

   b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Exercice 4 **5 points**

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère l'équation (E) :

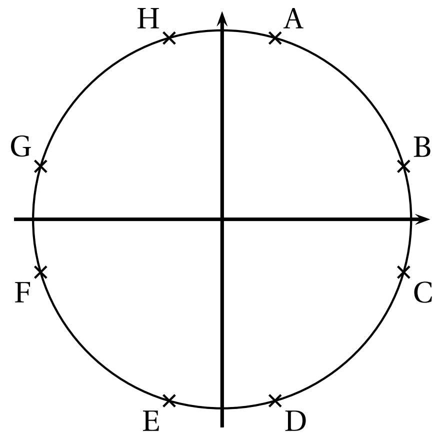
$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions sous forme algébrique.
2. Démontrer que les solutions de (E) sont de module 1.
3. On note α le réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Écrire les solutions de (E) sous forme exponentielle en fonction de α.

4. La figure ci-contre fait apparaître huit points du cercle unité. Deux de ces huit points ont une affixe solution de l'équation (E). Lesquels ?



Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation A** :

$$\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = 1.$$

2. Soit z le nombre complexe $\dfrac{1}{6}(2+5\mathrm{i})$.

Affirmation B :

$$\lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0.$$

3. On rappelle que, pour tout nombre réel x,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Affirmation C :

Pour tout nombre réel a de $[-\pi\ ;\ 0]$ tel que $\cos(2a) = \dfrac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\dfrac{3}{5}$.