DS 6 : 30 avril 2019

Spécialité Maths

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3;4)$ est solution de (E).

b.

- Le couple $(x; y)$ est solution de (E) donc : $7 \times x - 5 \times y = 1$
  Le couple $(3; 4)$ est solution de (E) donc : $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$
  Par soustraction membre à membre : $7(x-3) - 5(y-4) = 0$
  donc $7(x-3) = 5(y-4)$.
- Réciproquement, si le couple $(x; y)$ est tel que $7(x-3) = 5(y-4)$, on peut dire que $7(x-3) - 5(y-4) = 0 \iff 7x - 21 - 5y + 20 = 0 \iff 7x - 5y = 1$, et donc que le couple $(x; y)$ est solution de (E).
- Donc le couple d'entiers $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

c.

- Soit $(x; y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x-3) = 5(y-4)$.

  $7(x-3) = 5(y-4)$ entraîne que 7 divise $5(y-4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

  Comme $7(x-3) = 5(y-4)$ et $y - 4 = 7k$, cela implique que $7(x-3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.

  Donc si $(x; y)$ est solution de (E), alors $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Réciproquement, si le couple d'entiers $(x; y)$ est tel que
  $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k+3) - 5(7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$ donc $(x; y)$ est solution de (E).
- Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que
  $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5k+3 \\ y &=& 7k+4 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.

D'après la question **1**, on peut dire que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.

Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.

Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.

Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\dfrac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\dfrac{4}{25} = 016$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\dfrac{18}{25} = 0,72$.

On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n+1$ le pion soit en A.

S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.

S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.

On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} &=& 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} &=& 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{array}\right.$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16\\ 0,12 & 0,72 & 0,16\\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$$

soit $X_{n+1} = X_n T$ où $T = \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16\\ 0,12 & 0,72 & 0,16\\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11}\\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11}\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0,6 & 0\\ 0 & 0 & 0,56\end{pmatrix}$

a. On sait que $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve : $P = \begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 1 & -3 & 4\\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) la propriété $\mathscr{P}_n$: $T^n = PD^nP^{-1}$.

- *Initialisation* : on sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un naturel quelconque ($p \geqslant 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p+1$.
  $T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} =$
  $PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi
$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0T^n$.

a. $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = X_0T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$.

$b_n == \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,56^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$.

$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.