DS 5 : 26 mars 2019

Spécialité Maths

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 3u_n + 1 \iff 1u_{n+1} - 3u_n = 1$: cette égalité montre que les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2.
- si u_n est pair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est impair donc u_{n+1} est impair ;
- si u_n est impair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est pair donc u_{n+1} est pair.

Donc u_0 est pair, u_1 est impair, u_2 est pair, ...

3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$, $u_5 = 121$: 5 est premier et $u_5 = 11^2$ n'est pas premier : l'affirmation est fausse.

4. **a.** *Initialisation* : $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2u_0$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $2u_n = 3^n - 1$, alors

$u_{n+1} = 3u_n + 1$, donc $2u_{n+1} = 2(3u_n + 1) = 2 \times 3u_n + 2 = 3 \times 2u_n + 2 = 3 \times (3^n - 1) + 2 = 3^{n1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang suivant $n + 1$: d'après le principe de récurrence on a donc montré que pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

b.

n	3^n	$3^n \equiv \ldots [7]$
1	3	3
2	9	2
3	27	6
4	81	4
5	243	5
6	729	1

Le plus petit naturel non nul tel que $3^n \equiv 1$ [7] est donc 6.

c. $2\,022 = 6 \times 337$.

On a donc d'après la relation démontrée par récurrence :

$2u_{2022} = 3^{2022} - 1 = 3^{6\times 337} - 1 = \left(3^6\right)^{337}$.

D'après la question précédente $3^6 \equiv 1$ [7], donc

$2u_{2022} \equiv 1^{337} - 1$ [7] ou $2u_{2022} \equiv 1 - 1$[7], d'où

$2u_{2022} \equiv 0$ [7], donc $2u_{2022}$ est un multiple de 7 et comme 2 est premier avec 7, u_{2022} est un multiple de 7.

5. **a.** $u_0 = 0 \equiv 0$ [5]

$u_1 = 4 \equiv 4$ [5]

$u_2 = 13 \equiv 3$ [5]

$u_3 = 40 \equiv 0$ [5]

$u_4 = 121 \equiv 1$ [5]

b.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5	1	4	2	0	3

c. Si pour tout entier naturel n, u_n est congru à 4 modulo 5, $3u_n$ est aussi congru à 2 modulo 5 et $3u_n + 1 = u_{n+1}$ est congru à 3 modulo 5.

De même d'après le tableau de la question précédente :

u_{n+2} est congru à 0 modulo 5 ;

u_{n+3} est congru à 1 modulo 5 ;

u_{n+4} est congru à 4 modulo 5 et ainsi de suite.

d. D'après la question précédente les restes des divisions euclidiennes de u_n par 5 sont de façon cyclique : 4, 3, 0, 1 : on ne peut donc avoir comme reste 2.