DS 4 : 5 mars 2019

Spécialité Maths

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que : « Tous les nombres de Fermat sont premiers »,

1. **a.** $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ est premier.
   $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ est premier.
   $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ est premier.
   $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ est premier.

   b. On peut en déduire que les 4 premiers nombres de Fermat sont premiers mais on ne sait rien des suivants.

2. On considère l'algorithme ci-dessous :
   La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
   On sort de l'algorithme dès que le nombre N est diviseur du nombre $F = F_5$. Donc on peut affirmer que 641 est un diviseur de F_5.
   $F_5 > F_4$ et $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537 > 641$; donc on peut dire que $F_5 > 641$ donc que 641 est un diviseur strict de F_5. On en déduit que F_5 n'est pas premier.

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Pour tout entier naturel n non nul on a
   $(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2\times 2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n$.

2. Pour tout entier naturel n on note : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n$.

   On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.

   Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

   On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier n non nul.

   - Pour $n = 1$, on a : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = \prod_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 3$ et $F_n - 2 = F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$.
     Donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$.

- Soit k un entier naturel quelconque non nul tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$.

  Or $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = \prod_{i=0}^{k-1} F_i \times F_k$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$ donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = (F_k - 2) \times F_k$.

  D'après la question **B.1.** en prenant $k+1$ à la place de n, on a :
  $F_{k+1} = (F_k - 1)^2 + 1 = (F_k)^2 - 2F_k + 1 + 1 = (F_k - 2) \times F_k + 2$. Donc $F_{k+1} - 2 = (F_k - 2) \times F_k$.

  On en déduit que $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} - 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $k+1$; elle est donc héréditaire.

- La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$..

3. Soient m et n deux entiers naturels tels que $n > m$.

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2 \iff \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{n-1} F_i \times F_m = F_n - 2$$

On pose $q = \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{n-1} F_i$; le nombre q est le produit d'entiers naturels donc c'est un entier naturel.

On a donc $qF_m = F_n - 2$ ce qui équivaut à $F_n - qF_m = 2$.

Donc, pour tous m et n tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.

4. De l'égalité $F_n - qF_m = 2$ on déduit, d'après le théorème de Bézout, que le nombre 2 est un multiple du PGCD de F_n et de F_m.

Mais un nombre de Fermat est une puissance de 2 augmentée de 1, donc est un nombre impair. On en déduit que le PGCD de F_m et F_n est 1 donc que deux nombres de Fermat (distincts) sont toujours premiers entre eux.