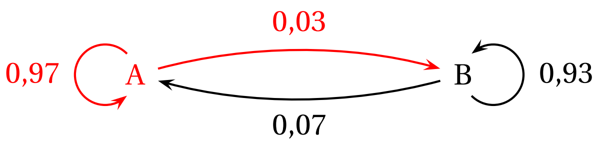
# DS 3 : 8 janvier 2019

# Spécialité Maths

**Partie A**

**1.** On décrit la situation précédente à l'aide d'un graphe en appelant A l'état « être sain » et B l'état « être défaillant » :




**2.** $a_1 = 0,97 a_0 + 0,07 b_0 = 0,97 \times 0,4 + 0,07 \times 0,6 = 0,43$
$b_1 = 0,03 a_0 + 0,93 b_0 = 0,03 \times 0,4 + 0,93 \times 0,6 = 0,57$

**3.** D'après le texte, on peut dire que $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\, a_n + 0,07\, b_n \\ b_{n+1} & = & 0,03\, a_n + 0,93\, b_n \end{array}\right.$

**4.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

**a.** La traduction matricielle du système précédent, est :
$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
ou encore $X_{n+1} = AX_n$.

**b.** Soit la propriété $X_n = A^n X_0$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $A^n = A^0 = I_2$ la matrice identité d'ordre 2.
  $A^0 \times X_0 = I_2 \times X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie à un rang $p \geqslant 0$ ; on va démontrer qu'elle est vraie au rang $p + 1$.
  On a comme hypothèse que $X_p = A^p X_0$.
  $X_{p+1} = A \times X_p = A \times (A^p X_0) = (A \times A^p) \times X_0 = A^{p+1} X_0$
  Donc la propriété est démontrée pour le rang $p + 1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel $n$, $X_n = A^n X_0$.

**c.** $X_{30} = A^{30} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$

Au bout de 30 jours, il y a $68,7\,\%$ d'appareils sains, et $31,3\,\%$ d'appareils défectueux.

**Partie B**

**1.** On pose $D = \begin{pmatrix}0,9 & 0\\ 0 & 0,9\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix}$.

**a.** Au bout de $n+1$ jours, un appareil est soit sain soit défectueux ; la proportion d'appareils sains est $a_{n+1}$ et la proportion d'appareil défectueux est $b_{n+1}$ donc $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

**b.** On a vu que
$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,07\,b_n\\ b_{n+1} & = & 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{array}\right.$ ;

or, pour tout $n$, $a_n + b_n = 1$, donc $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,07\,(1-a_n)\\ b_{n+1} & = & 0,03\,(1-b_n) + 0,93\,b_n \end{array}\right.$

ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,9\,a_n + 0,07\\ b_{n+1} & = & 0,9\,b_n + 0,03 \end{array}\right.$

$DX_n + B = \begin{pmatrix}0,9 & 0\\ 0 & 0,9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,9a_n\\ 0,9b_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,9a_n + 0,07\\ 0,9b_n + 0,03\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = X_{n+1}$

**2.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $Y_n = X_n - 10B$, donc $X_n = Y_n + 10B$.

**a.** $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B = DX_n + B - 10B = D\,(Y_n + 10B) - 9B = DY_n + 10DB - 9B$

$10D = \begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix} = 9I_2$ donc $10DB - 9B = 9I_2B - 9B = 9B - 9B = 0$

Donc $Y_{n+1} = DY_n$.

**b.** On admet que pour tout entier naturel $n$, $Y_n = D^n Y_0$.

Donc $X_n = Y_n + 10B = D^n Y_0 + 10B = D^n\,(X_0 - 10B) + 10B$.

**c.** $D = \begin{pmatrix}0,9 & 0\\ 0 & 0,9\end{pmatrix}$ donc $D = 0,9I_2$ ;

on a donc $D^n = 0,9^n I_2^n = 0,9^n I_2 = \begin{pmatrix}0,9^n & 0\\ 0 & 0,9^n\end{pmatrix}$

$X_0 = \begin{pmatrix}0,4\\ 0,6\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix}$ donc $10B = \begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
X_n = D^n\,(X_0 - 10B) + 10B &\iff X_n = \begin{pmatrix}0,9^n & 0\\ 0 & 0,9^n\end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}0,4\\ 0,6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\end{pmatrix}\\
&\iff X_n = \begin{pmatrix}0,9^n & 0\\ 0 & 0,9^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-0,3\\ 0,3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\end{pmatrix}\\
&\iff X_n = \begin{pmatrix}-0,3\times 0,9^n\\ 0,3\times 0,9^n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\end{pmatrix}\\
&\iff X_n = \begin{pmatrix}-0,3\times 0,9^n + 0,7\\ 0,3\times 0,9^n + 0,3\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & -0,3\times 0,9^n + 0,7\\ b_n & = & 0,3\times 0,9^n + 0,3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

**3.** La proportion d'ordinateurs défaillants est $b_n$ et on cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Or $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0,3$.

Sur le long terme, on peut dire que la proportion d'ordinateurs défaillants va tendre vers 30 %.