DS 5 : 26 mars 2019

Spécialité Maths

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »

4. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

c. En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

5. **a.** Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

b. Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5					

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

d. Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?