Exercice 1 (15 points)

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat sur internet;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste correspondant au n -ième achat.

Ainsi $P_1 = (1 \quad 0)$.

On note :

- A l'état: La personne effectue son achat sur internet;
- B l'état: La personne effectue son achat en magasin .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. (a) Calculer la matrice M^4 .
(b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5ième achat sur internet est égale à 0,8125.

4. On note $P = (a \ b)$ l'état stable associé à ce graphe.

(a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

(b) Résoudre le système précédent.

(c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$$

Exercice 2 (5 points)

Résoudre de façon matricielle en expliquant votre démarche, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$