Durée : 4 heures

Baccalauréat blanc 2019

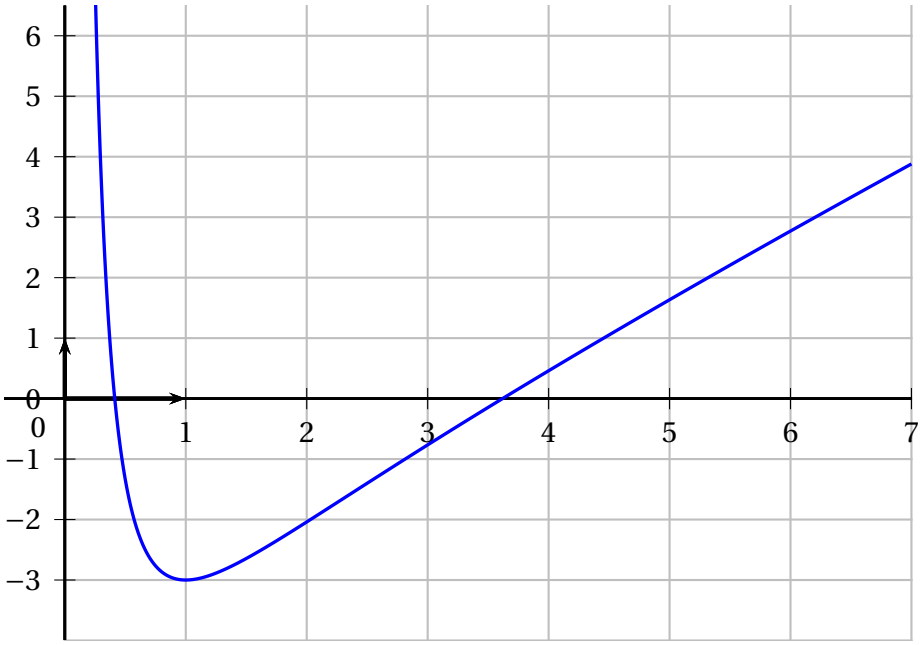
Sujet SPECIALITE

EXERCICE 1 **4 points**

La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Étudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **4 points**

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b. Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

— soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
— soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

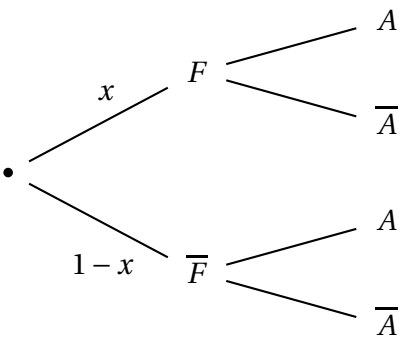
Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

On pose $x = P(F)$.



2. **a.** Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. En déduire une égalité vérifiée par x

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 3 **5 points**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

Proposition 1

Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$, z est un nombre réel.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z+5)\left(z^2 - 8z + 25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont sur un même cercle de centre O.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3} + i\right)^8$.

Proposition 4

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
j est une solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Proposition 5

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4i = 0$ admet une unique solution.

Exercice 4 **5 points**

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
Étape 2	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 3	On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.

2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
TRAITEMENT :	Lire a
	u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
	Tant que $r \neq 1$
	u prend la valeur $u+1$
	r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
	Fin du Tant que
SORTIE	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	…
r	0	21	…	…

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 21x_1 &= 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 &= -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

2. En utilisant la question B .2., établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{cases}$

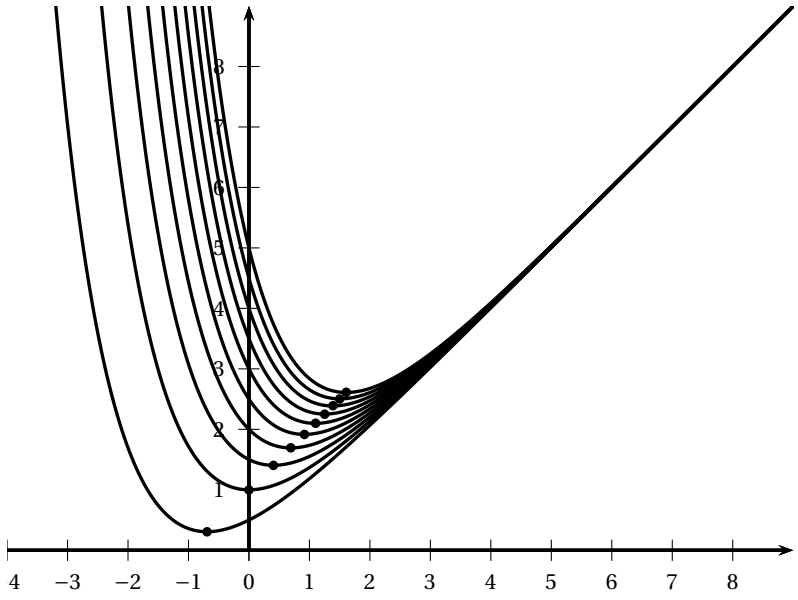
3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 **2 points**

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?