DS 6 : 28 mars 2019 Terminale S

Mathématiques

EXERCICE 1 **8 points**

$$u_0 = 1,\ u_1 = k \text{ et } u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. On a $u_2 = \dfrac{u_1^2}{ku_0} = \dfrac{k^2}{k \times 1} = k$;

$u_3 = \dfrac{u_2^2}{ku_1} = \dfrac{k^2}{k \times k} = 1$;

$u_4 = \dfrac{u_3^2}{ku_2} = \dfrac{1^2}{k \times k} = \dfrac{1}{k^2}$.

2. **a.** On tape dans la cellule B4 : =B3^2/(E2*B2).

b. Pour $k = \mathrm{e}$, il semble que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour $k = 0,9$, il semble que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Dans la suite, on suppose que $k = \mathrm{e}$.

On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n}$.

1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a. Comme $u_n > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

D'autre part $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}u_n} \iff \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{\mathrm{e}u_n} \iff \mathrm{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

On déduit :

$\ln\left(\mathrm{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \iff \ln \mathrm{e} + \ln \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \ln \dfrac{u_{n+1}}{\mathrm{e}u_n}$ soit $1 + v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} = v_n - 1$.

Cette égalité montre que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 de premier terme $v_0 = \ln u_1 - \ln u_0 = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times (-1)$, soit $v_n = 1 - n$.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

a. On a donc $S_n = 1 + (1-1) + (1-2) + \ldots + (1 - (n-1)) = n \times 1 - (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$

$$= n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n - n(n-1)}{2} = \frac{n(2 - (n-1))}{2} = \frac{n(3-n)}{2}.$$

b. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, donc

$S_n = v_0 + \ldots + v_n = \ln \dfrac{u_1}{u_0} + \ln \dfrac{u_2}{u_1} + \ldots + \ln \dfrac{u_n}{u_{n-1}} + \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

Tous les termes de u_1 à u_{n-1} se simplifient ; il ne reste plus que : $S_n = \ln \dfrac{u_n}{u_0} = \ln \dfrac{u_n}{1} = \ln u_n$.

3. **a.** D'après les deux questions précédentes on déduit que :

$$\left.\begin{array}{lcl} S_n & = & \dfrac{n(3-n)}{2} \\ S_n & = & \ln u_n \end{array}\right\} \text{donc } \ln u_n = \dfrac{n(3-n)}{2} \text{ et donc } u_n = \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

b. $u_n < 10^{-50} \iff \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \iff \dfrac{n(3-n)}{2} < \ln 10^{-50} \iff -n^2+3n-2\ln 10^{-50} < 0$

L'équation $-n^2+3n-2\ln 10^{-50} = 0$ admet pour racines $n_1 \approx -13,75$ et $n_2 \approx 16,75$ donc $-n^2+3n-2\ln 10^{-50} < 0$ pour $n \geqslant 17$.

La plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ est $n = 17$.

On vérifie à la calculatrice que $u_{16} \approx 6,8 \times 10^{-46} > 10^{-50}$ et que $u_{17} = 2,1 \times 10^{-52} < 10^{-50}$.

EXERCICE 2 **8 points**

1. La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ est $x \mapsto -k\mathrm{e}^{-kx}$ donc une primitive de f est $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-kx}$.
2. L'ordonnée de B est $f(1) = k\mathrm{e}{-k}$ donc l'aire du triangle OCB est $A_1 = \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k}$.
L'aire de $\mathscr{D}$ est :

$$A_2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k} = [F(x)]_0^1 - \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k} = -\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k} = 1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k}.$$

3. On a $A_2 = 2A_1$ si et seulement si :

$$1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k} = 2 \times \frac{k}{2}\mathrm{e}^{-k} \iff 1 - \left(1 + \frac{k}{2}\right)\mathrm{e}^{-k} = k\mathrm{e}^{-k} \iff 1 = \left(1 + \frac{3}{2}k\right)\mathrm{e}^{-k}$$

Considérons la fonction $g : x \mapsto 1 - \left(1 + \dfrac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x}$ et étudions ses variations sur $[0~;~+\infty[$.

Pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, on a :

$$g'(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{3}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \frac{3x-1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

Cette dérivée est du signe de $(3x-1)$ d'où le tableau de variations .

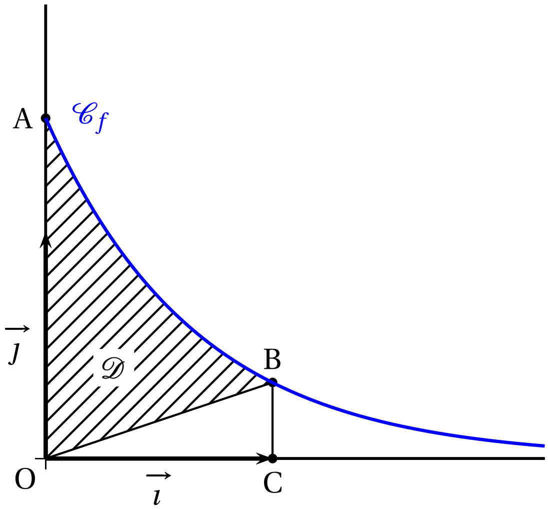
En effet, $g(x) = 1 - \left(1 + \dfrac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x}$ et, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (croissance comparée), on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Sur l'intervalle $\left[0~;~\frac{1}{3}\right]$, la fonction est strictement décroissante et $g(0) = 0$ donc, pour tout
$x \in \left]0~;~\frac{1}{3}\right]$, $g(x) < 0$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}~;~+\infty\right[$, la fonction g est définie, continue et strictement croissante de
$g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}075$ à 1. Comme $0 \in \left]g\left(\frac{1}{3}\right)~;~1\right]$, on en déduit, d'après de le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\frac{1}{3}~;~+\infty\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $\alpha \approx 0,76$.

Ce réel α est l'unique valeur strictement positif de k pour laquelle l'aire de $\mathscr{D}$ est le double de l'aire du triangle OBC. Voir la figure ci-dessous.



EXERCICE 3 **4 points**

• La première égalité $z_A + z_C = z_B + z_D$ peut s'écrire $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$: cette égalité montre que [AC] et [BD] ont le même milieu, donc que la quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

• La deuxième égalité $z_A + \text{i}z_B = z_C + \text{i}z_D$ peut s'écrire $z_A - z_C = \text{i}z_D - \text{i}z_B$ ou encore $z_A - z_C = \text{i}\left[z_D - z_B\right]$.

En prenant les modules des deux membres on obtient CA = BD ; en prenant les arguments on obtient $\left(\overrightarrow{\text{BD}}\, ,\, \overrightarrow{\text{CA}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur, c'est donc un rectangle et comme ses diagonales sont perpendiculaires c'est aussi un losange et finalement un carré.