corrigé DS 5

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. $36 = \dfrac{72}{2} = \dfrac{8 \times 9}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ donc 36 est un nombre triangulaire.

   De plus, $36 = 6^2$.

2. (a) $1+2+\ldots+n = p^2 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2+n-2p^2 = 0$.
   Donc le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

   (b) $n^2 + n - 2p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n - 8p^2 = 0 \iff 4n^2 + 4n + 1 - 8p^2 = 1 \iff (2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$
   Donc le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

1. Deux couples solution sont, par exemple, $(3\,;\,1)$ et $(1\,;\,0)$.

2. Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ solution de (E).

   Soit d un diviseur commun à x et y.

   Alors d divise x^2, y^2, $8y^2$ et donc d divise $x^2 - 8y^2$ donc d divise 1.

   On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$ ce qui veut dire que x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ x + 3y \end{pmatrix} \iff$
   $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

2. La matrice A a un déterminant égal à 1, donc non nul, donc elle admet une matrice inverse A^{-1}.

Pour déterminer A^{-1} on peut chercher la matrice carrée $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues $A \times A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; enfin il faut vérifier que $A' \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut également déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff A^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3x' - 8y' \\ y & = & -x' + 3y' \end{array} \right.$$

3. $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) $\iff x^2 - 8y^2 = 1$
$\iff (3x' - 8y')^2 - 8(-x' + 3y')^2 = 1$
$\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) = 1$
$\iff 9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2 - 8x'^2 + 48x'y' - 72y'^2 = 1$
$\iff x'^2 - 8y'^2 = 1$
$\iff (x'\ ;\ y')$ est solution de (E)

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété: $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E).

   - Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc $x_0^2 - 8y_0^2 = 9 - 8 = 1$ donc $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution de (E).
     La propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose que la propriété est vraie à un rang p ($p \geq 0$) c'est-à-dire que $(x_p\ ;\ y_p)$ est solution de (E); c'est l'hypothèse de récurrence.
     On veut démontrer que $(x_{p+1}\ ;\ y_{p+1})$ est solution de (E).
     On a vu dans la question précédente que si $(x\ ;\ y)$ était solution de (E), alors $(x'\ ;\ y')$ défini par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).
     Comme $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E), on peut dire que $(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1})$ est solution de (E) puisque $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
   - La propriété est vraie au rang 0; elle est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout n.

Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

- On cherche n entier naturel tel que: $1+2+3+\ldots+n \leq 2015$.
  Ce qui équivaut à $\dfrac{n(n+1)}{2} \geq 2015 \iff n^2+n-4030 \geq 0$.

  L'équation $x^2+x-4030=0$ a pour solutions $\dfrac{-1-2\sqrt{329}}{2} \approx -63,98$ et $\dfrac{-1+2\sqrt{329}}{2} \approx 62,98$.

  Pour que le nombre triangulaire soit supérieur à 2015, il faut que $n \geq 63$.

- Dans la partie **A** on a vu qu'un nombre triangulaire $1+2+\ldots+n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$.

- Dans la partie **C** on a déterminé une suite de couples $(x_n\,;\,y_n)$ qui étaient tous solutions de l'équation $x^2-8y^2=1$.

- On va donc chercher $n \geq 63$ tel que $(2n+1)^2-8p^2=1$; si $n \geq 63$, alors $2n+1 \geq 127$.

  Ce qui revient à chercher les couples $(x_n\,;\,y_n)$ solutions de (E) avec $x_n \geq 127$.

- En partant de $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A, on trouve comme solutions $\begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}99\\35\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}577\\204\end{pmatrix}$ $\ldots$

- $577 = 2\times 288+1$ donc un nombre triangulaire supérieur à 2015 est $1+2+3+\ldots+288 = \dfrac{288\times 289}{2} = 41616$.

- On peut vérifier que $41616 = 204^2$ (résultat en conformité avec la question **A. 2. a.**).