DS 4 spécialité maths 20/02/2018

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, on considère les points A(1 ; 5 ; $-$2), B(7 ; -1 ; 3) et C(-2 ; 7 ; -2) et on note P le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

   Si le plan (ABC) a pour équation $ax + by + cz = 73$, alors les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire: $\begin{cases} ax_{\text{A}} + by_{\text{A}} + cz_{\text{A}} = 73 \\ ax_{\text{B}} + by_{\text{B}} + cz_{\text{B}} = 73 \\ ax_{\text{C}} + by_{\text{C}} + cz_{\text{C}} = 73 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} a + 5b - 2c = 73 \\ 7a - b + 3c = 73 \\ -2a + 7b - 2c = 73 \end{cases}$$

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b - 2c \\ 7a - b + 3c \\ -2a + 7b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} = 73 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 73Y.$$

2. Soit la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

   À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

   Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Si on appelle I la matrice unité d'ordre 3, la calculatrice montre que $MN = NM = 73I$ donc que $M\left(\frac{1}{73}N\right) = \left(\frac{1}{73}N\right)M = I$.

   Cela prouve que la matrice M est inversible et que son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{73}N$.

3. $MX = 73Y \iff M^{-1}MX = M^{-1} \times 73Y \iff X = \frac{1}{73}N \times 73Y \iff X = NY$

$$X = NY \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19+4-13 \\ -8+6+17 \\ -47+17+36 \end{pmatrix} \iff$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation $10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $\mathrm{M}(x~;~y~;~z)$ un point appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

   (a) Si $z = 3$ et $10x + 15y + 6z = 73$, alors $10x + 15y + 6 \times 3 = 73$, donc $10c + 15y = 55 \iff 2x + 3y = 11$. Donc $(x~;~y)$ est solution de l'équation $2x + 3y = 11$.

   (b) $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$ donc le couple $(7~;~-1)$ est solution de (E).

   - Si le couple $(x~;~y)$ est solution de (E), alors $2x+3y = 11$. De plus, on sait que $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient: $2(x-7) + 3(y+1) = 0$ ou encore $2(x-7) = -3(y+1)$. On peut donc dire que le nombre 3 divise le produit $2(x-7)$; comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut dire, d'après le théorème de Gauss, que 3 divise $x-7$. On peut donc écrire $x - 7 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $x = 7+3k$. De $2(x-7) = -3(y+1)$ et $x - 7 = 3k$, on tire $2 \times 3k = -3(y+1)$ ce qui entraîne $2k = -y - 1$ ou encore $y = -1 - 2k$.
   - Réciproquement, si $x = 7 + 3k$ et $y = -1 - 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $2x + 3y = 2(7+3k) + 3(-1-2k) = 14 + 6k - 3 - 6k = 11$, donc le couple $(x~;~y)$ est solution de (E).

   L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(7+3k~;~-1-2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) D'après les questions précédentes, les points appartenant au plan $\mathcal{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont à chercher parmi les couples $(7+3k~;~-1-2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   On cherche donc k de $\mathbb{Z}$ tel que $7 + 3k \in \mathbb{N}$ et $-1 - 2k \in \mathbb{N}$.

   Il faut donc que $7 + 3k \geq 0$ et que $-1 - 2k \geq 0$, c'est-à-dire $k \geq -\dfrac{7}{3}$ et $k \leq -\dfrac{1}{2}$.
   Les deux seules valeurs possibles sont donc

   - $k = -2$ ce qui donne $x = 7+3(-2) = 1$ et $y = -1-2(-2) = 3$ donc le couple $(1~;~3)$;
   - $k = -1$ ce qui donne $x = 7+3(-1) = 4$ et $y = -1-2(-1) = 1$ donc le couple $(4~;~1)$.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

   Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

   (a) $10x + 15y + 6z = 73$ donc $15y = 73 - 10x - 6z$
   73 est un nombre impair, $10x$ et $6z$ sont deux nombres pairs, donc $73 - 10x - 6z$ est un nombre impair. On en déduit que $15y$ est un nombre impair; il faut pour cela que y soit impair sinon $15y$ serait pair.

   (b) $10x + 15y + 6z = 73$ donc $10x = 73 - 15y - 6z$

$$\left.\begin{array}{r} 10 = 3\times 3 + 1 \equiv 1\ [3] \implies 10x \equiv x\ [3] \\ \left.\begin{array}{lll} 73 = 3\times 24 + 1 & \implies & 73 \equiv 1\ [3] \\ 15 = 5\times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 15y \equiv 0\ [3] \\ 6 = 2\times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 6z \equiv 0\ [0] \end{array}\right\} \implies 73 - 15y - 6z \equiv 1\ [3] \end{array}\right\} \implies x \equiv 1\ [3]$$

   (c) On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff 10x + 15y + 6y = 73 \iff 10(1+3p) + 15(1+2q) + 6(3+5r) = 73$
   $\iff 10+30p+15+30q+18+30r = 73 \iff 30p+30q+30r = 30$
   $\iff p + q + r = 1.$

   (d) On cherche les triplets $(1 + 3p\ ;\ 1 + 2q\ ;\ 3 + 5r)$ où p, q et r sont des entiers naturels tels que $p + q + r = 1$. Il existe trois solutions:

   - $p = 1$, $q = 0$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (4\ ;\ 1\ ;\ 3)$;
   - $p = 0$, $q = 1$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 3\ ;\ 3)$;
   - $p = 0$, $q = 0$ et $r = 1$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 1\ ;\ 8)$.

   Ce sont les coordonnées des trois points de $\mathcal{P}$ à coordonnées dans $\mathbb{N}$.