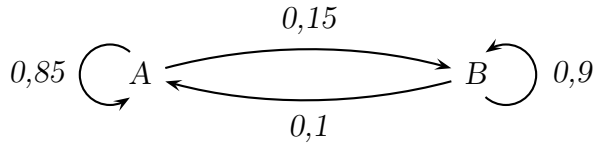
DS 1 octobre 2017

Exercice 1 (15 points)

1. *La première énigme est facile, donc* $a_1 = 1$ *et* $b_1 = 0$. *Donc* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Le graphe probabiliste :*



3. *La matrice* M *associée à ce graphe est :* $A = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

   Puis $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$

4. *Pour tout entier naturel* n, *on a* $a_n + b_n = 1$ *donc* $b_n = 1 - a_n$.

   On pose $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ *et* $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. *On a* $P_{n+1} = P_n \times M$.

   Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

   $\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85a_n + 0,1b_n & 0,15a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$

   Donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,85a_n + 0,1 - 0,1a_n = 0,75a_n + 0,1$.

5. *Pour tout entier naturel* n, *on pose* $v_n = a_n - 0,4$.

   (a) $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,75a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75a_n - 0,3$
   $= 0,75 \times \left(a_n - \dfrac{0,3}{0,75} \right) = 0,75 \times (a_n - 0,4) = 0,75v_n$.
   Donc la suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 0,75$ *et de 1er terme* $v_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

   (b) *Donc pour tout entier naturel* n, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,6 \times 0,75^{n-1}$.
   De plus pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 0,4$ *donc* $a_n = v_n + 0,4$.
   Donc $a_n = 0,6 \times 0,75^{n-1} + 0,4$.
   Or $0,6 = 0,8 \times 0,75$ *donc* $a_n = 0,6 \times 0,75 \times 0,75^{n-1} + 0,4 = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$.

   (c) *La suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 0,75$ *et* $q \in]-1\ ;\ 1[$ *donc la limite de* (v_n) *lorsque* n *tend vers l'infini est égale à zéro.*

   (d) *Calculons à présent la limite de la suite* (a_n). *Comme pour tout entier naturel* n, $a_n = v_n + 0,4$, *on peut en déduire que la limite de la suite* (a_n) *lorsque* n *tend vers l'infini est égale à* $0,4$.
   La probabilité d'obtenir une question facile sera donc de $0,4$, *celle d'une question difficile sera de* $0,6$; *il y aura donc plus de chance d'avoir une question difficile plutôt qu'une question facile.*

Exercice 2 (5 points)

Pour résoudre ce système , on va utiliser des matrices .

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Posons $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Posons $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit donc $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

Ce qui donne : $x = 3$, $y = 2$ *et* $z = 1$