

BAC BLANC Terminale S
Mai 2018
Epreuve de Mathématiques
Spécialité
Coefficient 9
Durée 4 Heures

Ce sujet comporte 7 pages

La calculatrice est autorisée

Aucun document n'est autorisé

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche même incomplète ou non fructueuse , qu'il aura développée .

Il est rappelé que la qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D , suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On sait que $P(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ .
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ . Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \frac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 2**5 points**

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite « chiffrement de Hill », dans un cas particulier. Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres entiers choisis entre 0 et 25, et tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.

Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation (E) : $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.
 - a. Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.
 - b. Démontrer que le couple (d, m) est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$9(d - 3) = 26(m - 1).$$

- c. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :

$$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2.
 - a. Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.
 - b. En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	Exemple : avec le mot MATH	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA TH	
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EGRY	

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour les lettres « ES », crypter le mot « ESPION ».

2. Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « $\equiv$ » pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo } 26 \text{ car } 108 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \text{ et } 84 \equiv 6 \text{ modulo } 26.$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.

On sait que si $x \equiv x' \text{ modulo } 26$ et $y \equiv y' \text{ modulo } 26$ alors :

$$ax + by \equiv ax' + by' \text{ modulo } 26.$$

Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2 , et B et C sont deux matrices colonne 2×1 , alors :

$$B \equiv C \text{ modulo } 26 \text{ implique } AB \equiv AC \text{ modulo } 26.$$

- Établir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.
- Décrypter le mot : XQGY.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

La courbe ($\mathcal{C}$) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe ($\mathcal{C}$) sur $[0 ; 1]$.
3.
 - a. Déterminer une primitive de f sur $[0 ; 1]$.
 - b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4**3 POINTS**

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_1^x (2-t)e^{-t} dt$.

Affirmation 1 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1. .

2. Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel non nul par $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

Affirmation 2 : La suite (u_n) est convergente .

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N , P , S et I sont des entiers naturels.
Traitement :	Saisir N Saisir P S prend la valeur 1 I prend la valeur N Tant que $S < P$ et $I > 0$ faire S prend la valeur $S \times I$ I prend la valeur $I - 1$ Fin tant que
Sortie :	Afficher I.

Affirmation 3 : Si l'utilisateur saisit $N = 10$ et $P = 10000$ alors l'algorithme retourne 6 .

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 3

