DS 4 spécialité maths 20/02/2018

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,;\, \overrightarrow{j}\,;\, \overrightarrow{k})$ on considère les points A$(1\ ;\ 5\ ;\ -2)$, B$(7\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et C$(-2\ ;\ 7\ ;\ -2)$ et on note P le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan P sous la forme : $ax+by+cz=73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

   À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

   Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

   À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.

   En déduire que le plan P admet pour équation cartésienne :

   $10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

   (a) Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation
   (E) : $2x + 3y = 11$.

(b) Justifier que le couple $(7\ ;\ -1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

(c) Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

   Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

   (a) Montrer que y est impair.

   (b) Montrer que: $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.

   (c) On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

   Montrer que le point $M(x\ ;\ y;\ z)$ appartient au plan P si et seulement si $p+q+r = 1$.

   (d) En déduire qu'il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.