

∞ **Baccalauréat Blanc janvier 2018** ∞
SPÉCIALITÉ

Durée : 4 heures / 5 exercices

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

2 points

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p .

Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
 - a. Calculer la valeur de p .
 - b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2

3 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (2 + x)e^{-x} + 1.$$

Proposition 2

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse -1 est : $\frac{2}{e}$.

3. Proposition 3

Le nombre $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est réel.

EXERCICE 3**5 points**

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

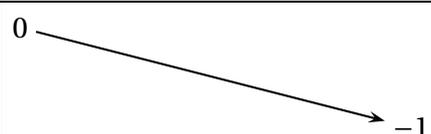
$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1



En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rend le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
 - a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
 - b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

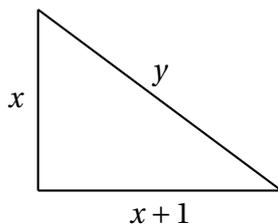
EXERCICE 4

5 points

Exercice pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y , où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x , $x + 1$ et y , où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPJ, on dira que le couple $(x ; y)$ définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI si, et seulement si, on a :

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple $(3 ; 5)$.
3.
 - a. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
 - b. Montrer que dans un couple d'entiers $(x ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.
4. Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x ; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B.$$

1.
 - a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - b. Montrer que : $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.
 - c. En déduire que si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI.
2. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3, y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , le couple $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI.
3. Déterminer, par la méthode de votre choix que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

EXERCICE 5

5 POINTS

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.
Démontrer que :
 - Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
 - Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.
4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.