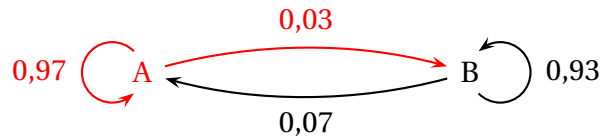


DS 3 : 9 janvier 2017

Spécialité Maths

Partie A

1. On décrit la situation précédente à l'aide d'un graphe en appelant A l'état « être sain » et B l'état « être défaillant » :



2. $a_1 = 0,97a_0 + 0,07b_0 = 0,97 \times 0,4 + 0,07 \times 0,6 = 0,43$
 $b_1 = 0,03a_0 + 0,93b_0 = 0,03 \times 0,4 + 0,93 \times 0,6 = 0,57$
3. D'après le texte, on peut dire que $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97a_n + 0,07b_n \\ b_{n+1} = 0,03a_n + 0,93b_n \end{cases}$
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

- a. La traduction matricielle du système précédent, est :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou encore $X_{n+1} = AX_n$.

- b. Soit la propriété $X_n = A^n X_0$.

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, $A^n = A^0 = I_2$ la matrice identité d'ordre 2.

$A^0 \times X_0 = I_2 \times X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

On suppose la propriété vraie à un rang $p \geq 0$; on va démontrer qu'elle est vraie au rang $p + 1$.

On a comme hypothèse que $X_p = A^p X_0$.

$$X_{p+1} = A \times X_p = A \times (A^p X_0) = (A \times A^p) \times X_0 = A^{p+1} X_0$$

Donc la propriété est démontrée pour le rang $p + 1$.

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

c. $X_{30} = A^{30} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$

Au bout de 30 jours, il y a 68,7 % d'appareils sains, et 31,3 % d'appareils défectueux.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.

a. Au bout de $n + 1$ jours, un appareil est soit sain soit défectueux; la proportion d'appareils sains est a_{n+1} et la proportion d'appareil défectueux est b_{n+1} donc $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. On a vu que

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,07 b_n \\ b_{n+1} = 0,03 a_n + 0,93 b_n \end{cases};$$

$$\text{or, pour tout } n, a_n + b_n = 1, \text{ donc } \begin{cases} a_{n+1} = 0,97 a_n + 0,07 (1 - a_n) \\ b_{n+1} = 0,03 (1 - b_n) + 0,93 b_n \end{cases}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \begin{cases} a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,07 \\ b_{n+1} = 0,9 b_n + 0,03 \end{cases}$$

$$DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 a_n \\ 0,9 b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 a_n + 0,07 \\ 0,9 b_n + 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

2. On pose, pour tout entier naturel n , $Y_n = X_n - 10B$, donc $X_n = Y_n + 10B$.

a. $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B = DX_n + B - 10B = D(Y_n + 10B) - 9B = DY_n + 10DB - 9B$

$$10D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_2 \text{ donc } 10DB - 9B = 9I_2 B - 9B = 9B - 9B = 0$$

$$\text{Donc } Y_{n+1} = DY_n.$$

b. On admet que pour tout entier naturel n , $Y_n = D^n Y_0$.

$$\text{Donc } X_n = Y_n + 10B = D^n Y_0 + 10B = D^n (X_0 - 10B) + 10B.$$

c. $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ donc $D = 0,9I_2$;

$$\text{on a donc } D^n = 0,9^n I_2^n = 0,9^n I_2 = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} \text{ donc } 10B = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B \iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n \\ 0,3 \times 0,9^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ b_n = 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{cases}$$

3. La proportion d'ordinateurs défaillants est b_n et on cherche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Or $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ et on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0,3$.

Sur le long terme, on peut dire que la proportion d'ordinateurs défaillants va tendre vers 30 %.
