corrigé DS 2 : 5 décembre 2016

Spécialité Maths

1. $(1+\sqrt{6})^2 = 7+2\sqrt{6}$;
$(1+\sqrt{6})^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)^2 = 73+28\sqrt{6}$;
$(1+\sqrt{6})^6 = (1+\sqrt{6})^2(1+\sqrt{6})^4 = \left(7+2\sqrt{6}\right)\left(73+28\sqrt{6}\right) = 847+342\sqrt{6}$.

2. Avec $n \in \mathbb{N}$ et avec a_n et b_n tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$$

a. On sait déjà (d'après la question 1. que $a_1 = 1$; $b_1 = 1$

b. $a_2 = 7$; $b_2 = 2$; $a_4 = 73$; $b_4 = 28$; $a_6 = 847$; $b_6 = 342$.

c. On a d'une part $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6}$
On a également : $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1} = \left(1+\sqrt{6}\right)^n\left(1+\sqrt{6}\right) = \left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) = a_n + 6b_n + (a_n+b_n)\sqrt{6}$. Comme $a_n+6b_n \in \mathbb{N}$ et $a_n+b_n \in \mathbb{N}$, on en déduit par identification que :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + 6b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{cases}$$

d. On a $a_{n+1}+b_{n+1} = 2a_n + 7b_n \equiv 2(a_n+b_n)[5]$.
Supposons que 5 divise $a_{n+1}+b_{n+1}$ alors $2(a_n+b_n) \equiv 0[5]$
Montrons maintenant que si $2x \equiv 0[5]$ alors $x \equiv 0[5]$
Faisons une table de congruence modulo 5

x	0	1	2	3	4
2x	0	2	4	1	3

On a immédiatement que le seul cas possible pour obtenir $2x \equiv 0[5]$ est $x \equiv 0[5]$, donc si 5 divise $2(a_n+b_n)$ alors 5 divise a_n+b_n

e. Démonstration par récurrence

- Initialisation : 5 ne divise pas $a_1+b_1 = 2$;
- Hérédité : Supposons que pour un n donné , 5 ne divise pas a_n+b_n alors par contraposée , la question précédente nous dit que 5 ne divise pas $a_{n+1}+b_{n+1}$

Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 5 ne divise pas a_n+b_n.

f. Si pour $n \in \mathbb{N}$, d est un diviseur de a_{n+1} et b_{n+1}, alors d divise $a_{n+1}-b_{n+1} = 5b_n$. Si 5 divise a_n et b_n alors 5 divise a_n+b_n ; or on vient de montrer que ce n'était pas possible . Donc $d \neq 5$, donc d divise b_n. Mais il divise aussi $b_{n+1}-b_n = a_n$. Donc d est un diviser commun à a_n et b_n qui sont premiers entre eux. Donc $d = 1$

g.

- Initialisation : a_1 et b_1 sont premiers entre eux donc la propriété est vraie au premier rang .
- Hérédité : Supposons que pour un n donné , a_n et b_n premiers entre eux . Par la question précédente , on sait qu'alors tout diviseur commun de a_{n+1} et b_{n+1} est égal à 1 autrement dit que a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux .

Conclusion : pour tout n , a_n et b_n premiers entre eux

h. Puisque $a_6 = 847$; $b_6 = 342$, par la question précédente , 847 et 342 sont premiers entre eux .