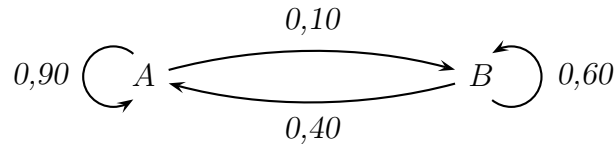


Exercice 1 (15 points)

1. On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. D'après le texte:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,4 b_n \\ b_{n+1} = 0,1 a_n + 0,6 b_n \end{cases}$$

Ce qui équivaut à: $(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

La matrice de transition M associée à ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

3. (a) On trouve à la calculatrice $M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$

- (b) La probabilité que la personne interrogée fasse son 5ième achat sur internet est a_5 .

D'après le cours, on sait que, pour tout $n \geq 1$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$ donc

$$P_5 = P_1 \times M^4 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = (0,8125 \ 0,1875);$$

on en déduit que $a_5 = 0,8125$ et $b_5 = 0,1875$.

La probabilité que la personne interrogée fasse son 5ième achat sur internet est donc 0,8125.

4. On note $P = (a \ b)$ l'état stable associé à ce graphe.

- (a) Comme P est un état du système, on peut dire que $a + b = 1$.

P est un état stable donc $P = P \times M$ ce qui équivaut à:

$$(a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \iff (a \ b) = (0,9a + 0,4b \ 0,1a + 0,6b) \iff$$

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,4b \\ b = 0,1a + 0,6b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -0,1a + 0,4b \\ 0 = 0,1a - 0,4b \end{cases} \iff 0,1a - 0,4b = 0$$

$$\text{Donc } a \text{ et } b \text{ vérifient le système } \begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0,1a = 0,4b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4b \\ a + b = 1 \end{cases} \iff \\ & \begin{cases} a = 4b \\ 4b + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4b \\ b = 0,2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0,8 \\ b = 0,2 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) À long terme, la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet tend vers a donc vers $0,8$.

5.

6. D'après le contexte, on peut dire que, pour tout n , $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

On sait également que, pour tout n , $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$;

donc $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4(1 - a_n) = 0,9a_n + 0,4 - 0,4a_n = 0,5a_n + 0,4$

Exercice 2 (5 points)

Résoudre de façon matricielle en expliquant votre démarche, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ -3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors : $AX = B \iff X = A^{-1}B$ et à la calculatrice, on obtient :

$x = 1$, $y = -2$ et $z = 3$