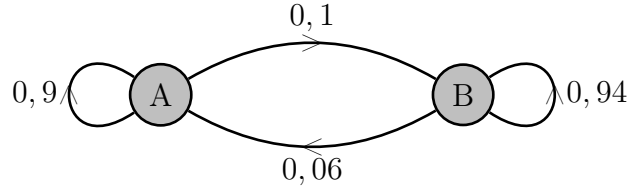


1. (a) La situation peut être représentée par l'arbre probabiliste ci-dessous :



- (b) La matrice de transition correspondante est : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$.

- (c) $P_1 = P_0 \times M$

$$P_1 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (1 \times 0,9 + 0 \times 0,06 \quad 1 \times 0,1 + 0 \times 0,94)$$

$$P_1 = (0,9 \quad 0,1).$$

2. L'algorithme qui convient est l'algorithme 2.

En effet, dans l'algorithme 1, la relation de récurrence utilisée pour passer de b_n à b_{n+1} est

$$b_{n+1} = 0,1 \times a_{n+1} + 0,94 \times b_n,$$

car la valeur de la variable a a été modifiée à la ligne a prendre la valeur $0,9 \times a + 0,06 \times b$ avant le calcul de b .

3. (a) Pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.

Or, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$.

On obtient donc, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n)$,

soit $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

- (b) Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$

$$= 0,84a_n + 0,06 - 0,375$$

$$= 0,84a_n - 0,315$$

$$= 0,84 \left(a_n - \frac{0,315}{0,84} \right)$$

$$= 0,84(a_n - 0,375)$$

$$= 0,84u_n$$

La suite (u_n) est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,84$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 0,375 = 1 - 0,375 = 0,625$.

(c) D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$,
soit $u_n = 0,625 \times 0,84^n$.

Comme, pour tout entier naturel n , $u_n = a_n - 0,375$, alors $a_n = u_n + 0,375$.

En utilisant ce qui précède, on obtient donc $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.

$$4. \begin{cases} a + b = 1 \\ a - 0.6b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1.6b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0.625 \\ a = 0.375 \end{cases}$$

5. Si P est l'état stable alors , $P = PM$ donc $a = 0,9a + 0,06b$ et $b = 0,1a + 0,94b$ ce qui dans les deux cas donnent : $0,1a - 0,06b = 0$ ou après légère simplification , $a - 0,6b = 0$. De plus , a et b étant les deux probabilités de l'univers , $a + b = 1$. On retrouve donc le système précédent et on peut en conclure que $P = (0,375 \quad 0,625)$