

Epreuve commune mathématiques TS mardi 4 avril 2017

Sujet spécialité

EXERCICE 1

5 points

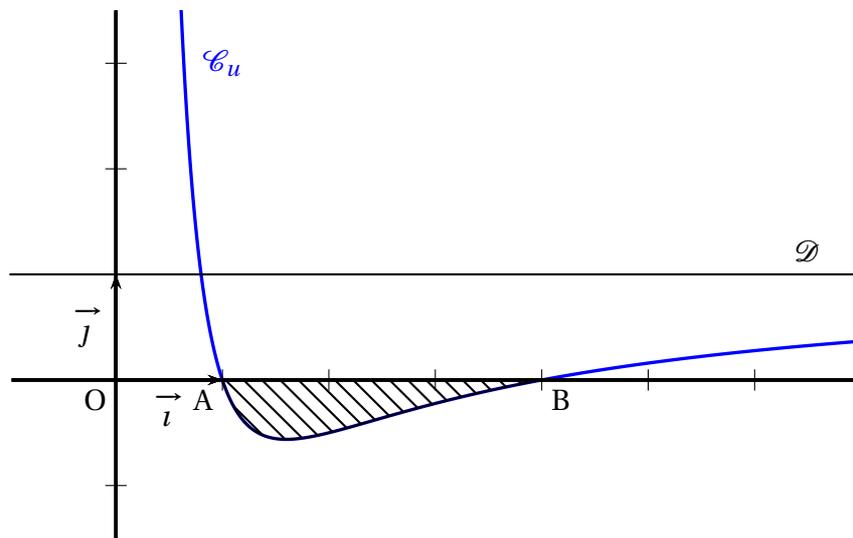
Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par \mathcal{C}_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe \mathcal{C}_u et la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe \mathcal{C}_u passe par les points $A(1; 0)$ et $B(4; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite \mathcal{D} sont asymptotes à la courbe \mathcal{C}_u .

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a .
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

-
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note \mathcal{A}_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2**5 points**

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.

Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ' .

On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\frac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T' .

EXERCICE 3**5 points**

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	: u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	: Demander la valeur de p
Traitement	:
Sortie	:

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans \mathbb{Z} :

$$7x - 5y = 1.$$

- Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).
- Montrer que le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.
- Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

- Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

- Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

- Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n , on note a_n , b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n .

On note X_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n \quad c_n)$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$X_{n+1} = X_n T.$$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

- À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P . On pourra remarquer qu'ils sont entiers.
- Montrer que $T^n = PD^n P^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n .

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n , $X_n = X_0 T^n$.
- Déterminer les nombres a_n, b_n , à l'aide des coefficients α_n et β_n . En déduire c_n .
 - Déterminer les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .
 - Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?