

Devoir de 4 heures, coefficient 9.

La calculatrice est autorisée.

Sujet "spécialité"

EXERCICE 1

7 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g .

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0 ; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $]0,703 ; 0,704[$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

3. Étude de tangentes

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f . Soit b un réel strictement positif et T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse b .

On souhaite déterminer les éventuelles valeurs de b pour lesquelles la droite T passe par le point H de coordonnées $(0 ; 2)$.

a. Montrer que la condition $H \in T$ équivaut à $(1 - b) \left(e^b + \frac{2}{b} \right) = 0$.

b. Quelles sont les éventuelles tangentes à la courbe \mathcal{C} passant par le point H ?

EXERCICE 2**5 points**

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels K est un entier
Début :	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que $K < N$ Affecter $K + 1$ à K Affecter U à W Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.
 - b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n = 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
 - b. Dédire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
 - c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

EXERCICE 3**3 points**

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

- a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
- b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .
- c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
- d. L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} .

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
- Quelle est la probabilité qu'au moins un arbre soit feuillu ? On arrondira à 10^{-4} .

EXERCICE 4**5 points****Partie A : Q.C.M.**

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification incomplète sera valorisée

1. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par : $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.
Affirmation : pour tout entier naturel n , le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.
2. On considère l'entier $N = 11^{2011}$.
Affirmation : L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	Exemple : avec le mot MATH	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA TH	
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EGRY	

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour les lettres « ES », crypter le mot « ESPION ».

2. Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « \equiv » pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo } 26 \text{ car } 108 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \text{ et } 84 \equiv 6 \text{ modulo } 26.$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.

On sait que si $x \equiv x'$ modulo 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors : $ax + by \equiv ax' + by'$ modulo 26.

Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2 , et B et C sont deux matrices colonne 2×1 , alors :

$$B \equiv C \text{ modulo } 26 \text{ implique } AB \equiv AC \text{ modulo } 26.$$

- Établir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.
- Décrypter le mot : XQGY.