DM 8

Enoncé pour les loups

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{x-1}{x}lnx$.

1. *On note g la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $g(x)=x-1+lnx$
   (a) *Etudier les variations de g sur* $]0;+\infty[$
   (b) *Montrer que* $g(1)=0$ *et en déduire le signe de g(x) sur* $]0;+\infty[$
2. *Déterminer les limites de f en 0 et en* $+\infty$ *et en déduire d'éventuelles asymptotes .*
3. *Etudier le sens de variations de f*
4. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse e .*
5. *Tracer la courbe de f .*

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$

1. *Etudier les limites de f en 0 et en* $+\infty$
2. *Etudier les variations de f*
3. *Tracer la courbe de f dans un repère d'unités graphiques 5 cm .*

Enoncé pour les lions

Exercice 1

Soit $g_n(x)$ *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $g_n(x)=x-n+\dfrac{n}{2}lnx$ *où n est un entier naturel non nul .*

1. *Déterminer les limites de* $g_n(x)$ *en 0 et en* $+\infty$
2. *Etudier les variations de* $g_n(x)$
3. *En déduire que l'équation* $g_n(x)=0$ *admet une unique solution* α_n
4. *Démontrer que* $1\leq\alpha_n\leq e^2$ *et* $ln(\alpha_n)=2-\dfrac{2}{n}\alpha_n$

5. *Exprimer* $g_{n+1}(\alpha_n)$ *en fonction de* α_n *et de n et en déduire que la suite* (α_n) *est croissante .*

6. *Montrer que* (α_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

Exercice 2

On considère la courbe $\mathcal{C}$ *de la fonction* $f(x) = lnx$ *. Montrer qu'il existe un unique point M de* $\mathcal{C}$ *situé à une distance minimale de l'origine et préciser le position de ce point .*