DM 6

Enoncé pour les loups

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x + \dfrac{4}{1+e^x}$ *. On désigne par* $\mathcal{C}$ *la courbe de f dans un repère orthonormal d'unités 2 cm .*

1. *Déterminer les limites de f en* $-\infty$ *et en* $+\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -+\infty}$

2. *Calculer* $f'(x)$ *et montrer que* $f'(x) = \left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2$

   $f'(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1-2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2$

3. *Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations .*

   De façon évidente , $f'(x) \geq 0$ *donc :*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

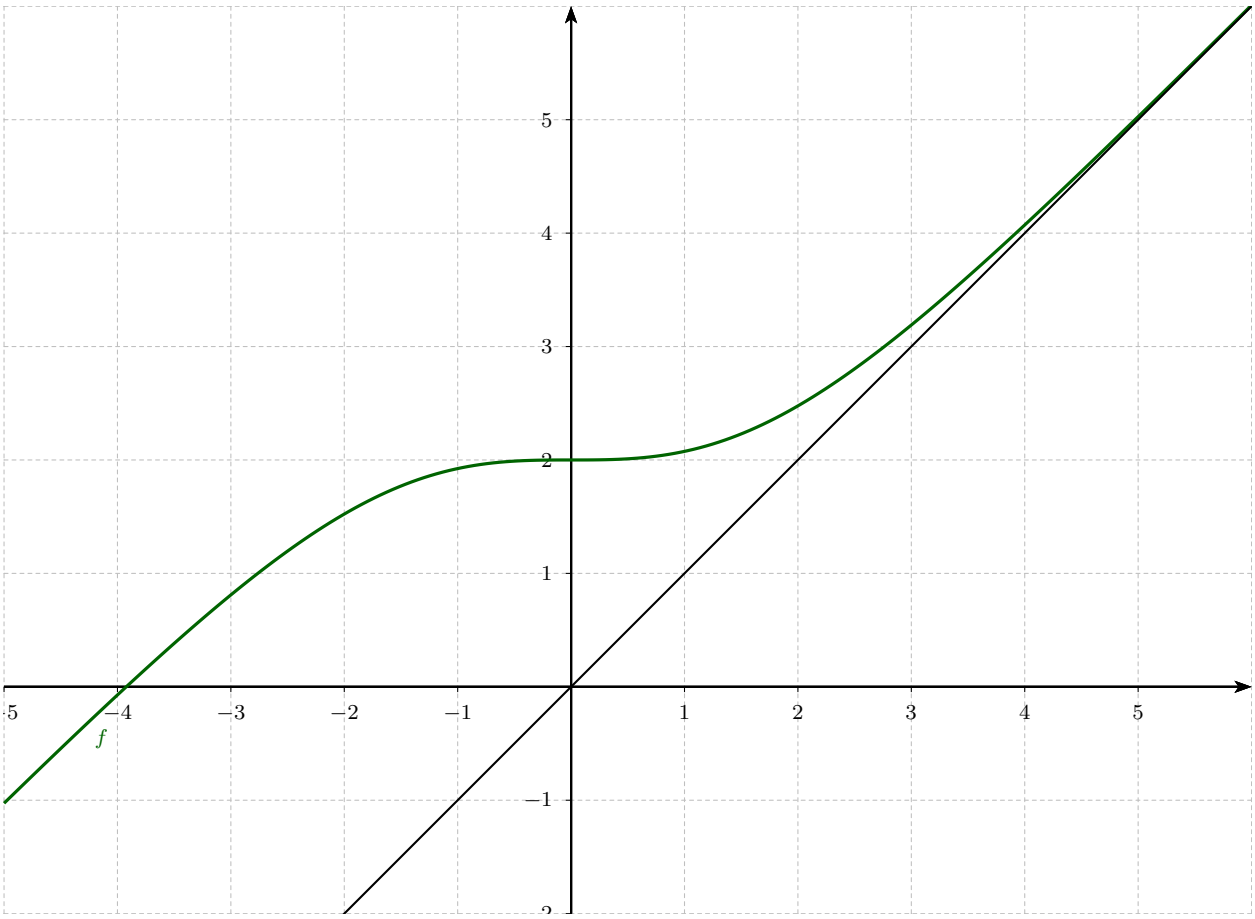
4. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution sur* $\mathbb{R}$ *et en donner une valeur approchée à* 10^{-2} *près .*

   La fonction f est continue car dérivable , strictement croissante sur $\mathbb{R}$ *et* $0 \in]-\infty;+\infty[$ *donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique* α *tel que* $f(\alpha) = 0$ *. Par la calculatrice , on obtient :* $\boxed{\alpha = -3,93}$

5. *On considère la droite D d'équation* $y = x$ *. Etudier la position relative de* $\mathcal{C}$ *et D .*

   Etudions le signe de $f(x) - x = \dfrac{4}{1+e^x}$ *. Or* $e^x > 0$ *pour tout réel x donc* $f(x) - x > 0$ *et donc* $\boxed{\text{la courbe de f est au-dessus de D pour tout réel x .}}$

6. *Tracer D et $\mathcal{C}$*



Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$

1. *Justifier que f existe*

   Pour qu'une fraction existe , son dénominateur ne doit pas être nul ; posons $X = e^x$ et regardons si $X^2 - X + 1 = 0$ a des solutions .

   $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ *donc pas de solution . Le dénominateur ne s'annule donc jamais et f existe bien .*

2. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire d'éventuelles asymptotes .*

   $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

   $f(x) = \dfrac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$ *. La courbe de f admet donc une* $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 2}$

3. *Calculer* $f'(x)$

$f'(x) = \dfrac{(4e^{2x}-e^x)(e^{2x}-e^x+1)(2e^{2x}-e^x)(2e^{2x}-e^x)}{(e^{2x}-e^x+1)^2} = \dfrac{-e^{3x}+4e^{2x}-e^x}{(e^{2x}-e^x+1)^2}$

$\boxed{f'(x)\dfrac{-e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^{2x}-e^x+1)^2}}$

Enoncé pour les lions

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (ax+b)e^{-x}+1$ *. On sait que sa courbe* $\mathcal{C}$ *passe par A(0;4) et B(-1,5;1) dans un repère orthonormal .*

1. *Déterminer a et b*

On a : $\begin{cases} b+1=4 \\ -\quad 1 \\ 5a+b \quad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$

$\boxed{f(x) = (2x+3)e^{-x}+1}$

2. *Déterminer les limites de f en* $-\infty$ *et en* $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$f(x) = 2xe^{-x}+3e^{-x}+1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ *par croissance comparée et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-x} = 0$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

3. *En déduire l'existence d'une asymptote D dont on donnera une équation*

La courbe de f admet une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y=1}$

4. *Etudier la position relative entre* $\mathcal{C}$ *et D*

Etudions le signe de $f(x)-1 = (2x+3)e^{-x}$ *; or* $e^{-x} > 0$ *pour tout x et donc on a :* $f(x)-1 > 0$ *sur* $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ *et* $f(x)-1<0$ *sur* $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$ *.*

La courbe de f est donc au-dessus de son asymptote sur $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ *et en dessous sur* $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$ *.*

5. *Etudier les variations de f .*

$f'(x) = 2e^{-x}-(2x+3)e^{-x} = -e^{-x}(1+2x)$ *donc :*

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2\sqrt{e}+1$	↘	1

6. *Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .*

$\boxed{y = -x + 4}$

Exercice 2

Etudier le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e} = 0$

Etudions les variations de f en posant $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$

$f'(x) = 2 + 2e^{-x} > 0$ *donc f est croissante sur* $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$f(x) = e^{-x}(2xe^{x}-2)+\frac{1}{e}$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ *par croissance comparée donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

La fonction f est donc continue car dérivable , strictement croissante sur $\mathbb{R}$ *et* $0 \in]-\infty;+\infty[$ *donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe une seule solution à l'équation* $f(x) = 0$.