DM 5

Enoncé pour les loups

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités graphiques 2 cm .

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$

   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

   $g(x)=x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)$

   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}=1$ et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-+\infty$

   (b) Etudier les variations de g

   $g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ et donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

   (c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

   Sur $]-\infty;1[$ on a $f(x)<0$. Sur $]1;+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable , strictement croissante , et 0 appartient bien à l'intervalle $]-6;+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

   (d) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près .

   A la calculatrice , on obtient : $2,19<\alpha<2,2$

   (e) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$f(x) = \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{2}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(b) Déterminer les limites de f en -1 et en 1

$\lim\limits_{x\to1} x^3+2x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to-1} x^3+2x^2 = 1$ et on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^-} x^2-1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

De même : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.

(c) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

(d) En déduire le tableau de variations de f .

$(x^2-1)^2 \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce qui donne :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. (a) Démontrer que $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

$$x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x^2-1)+x+2}{x^2-1} = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = f(x)$$

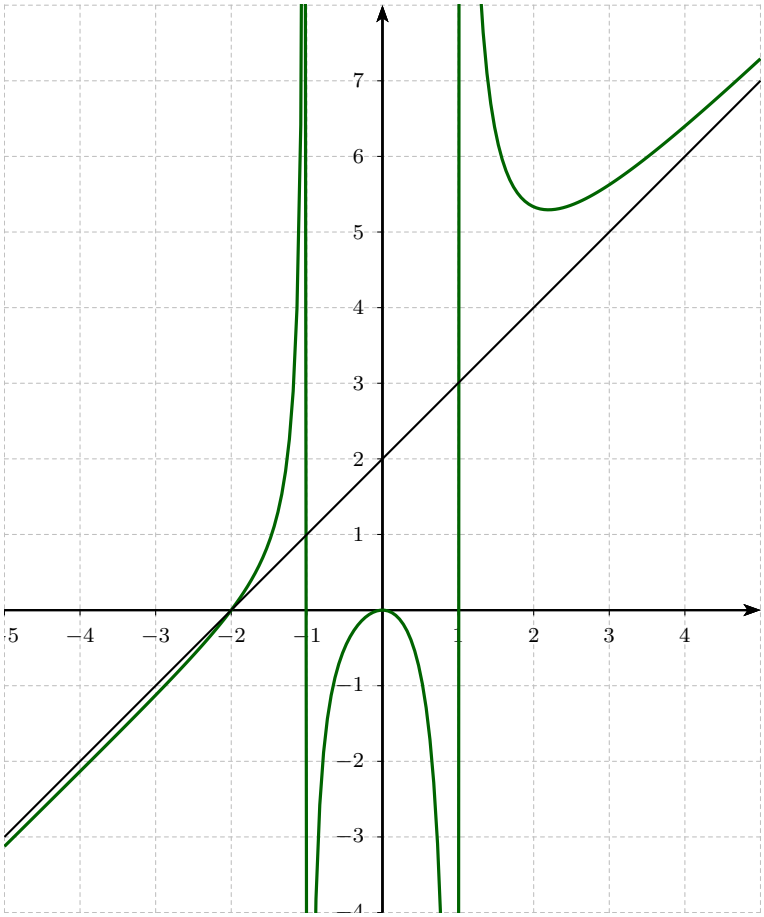
(b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $y = x + 2$

Nous allons étudier le signe de $f(x) - (x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ D'où :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-(x+2)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

On a donc la courbe de f au-dessus de D sur $]-2;-1[\cup]1;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty;-2[\cup]-1;1[$

(c) Tracer $\mathcal{C}$ et D



Enoncé pour les lions

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$

   (a) Dresser le tableau de variations de g

   $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1) > 0$

   $g(x) = x^3\left(1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{8}{x^3}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} = 1$ et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

   donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

   (b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

   Sur $]-\infty;+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable , strictement croissante , et 0 appartient bien à l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique $\alpha \in]-\infty;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   (c) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près .

   $-1,6 < \alpha < -1,5$

   (d) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} 1-\dfrac{4}{x^3}=1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(b) Calculer $f'(x)$

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

(c) En déduire le tableau de variations de f .

$(x^2+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce qui donne :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha]$	↘	-4	↗	$+\infty$

3. (a) Démontrer qu'il existe a , b , c et d réels tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$

Par identification :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1} \iff \frac{x^3-4}{x^2+1}=\frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{x^2+1}$$

$$\begin{cases} a & & & = 1 \\ & b & & = 0 \\ a & & +c & = 0 \\ & b & & +d=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 0 \\ c & = -1 \\ d & = -4 \end{cases}$$

Donc $f(x)=x-\dfrac{x+4}{x^2+1}$

(b) On appelle asymptote oblique à une courbe représentative d'une fonction f une droite d'équation $y=ax+b$ qui vérifie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique D .

$f(x) - x = -\dfrac{x+4}{x^2+1} = \dfrac{1+\dfrac{4}{x}}{x(1+\dfrac{1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{4}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$

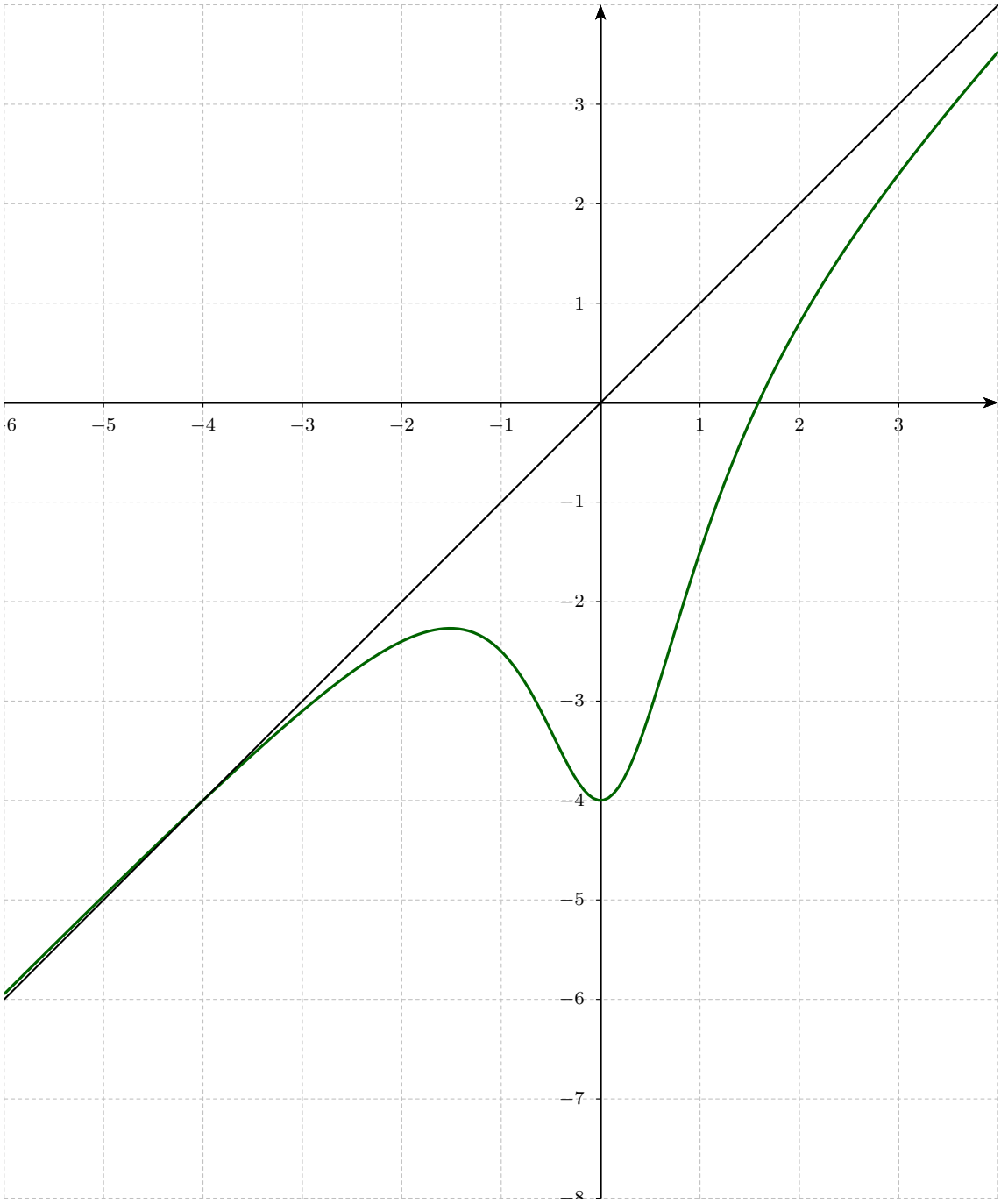
La courbe $\mathcal{C}$ admet donc comme asymptote oblique la droite d'équation $y = x$

(c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite D

Etudions le signe de $f(x) - x = -\dfrac{x+4}{x^2+1}$ qui est du signe de $-x-4$ car le dénominateur est strictement positif .

La courbe de f est donc au-dessus de son asymptote sur $]-\infty;-4[$ et en-dessous sur $]-4;+\infty[$

(d) Tracer $\mathcal{C}$ et D


3
2
1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8