DM 4

Enoncé pour les loups

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixe respectives $2-i$ et $-2i$. A tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1. Déterminer E' si E a pour affixe $5-4i$

   $z_{E'}=\dfrac{5-4i-2+i}{5-4i+2i}=\dfrac{3-3i}{5-2i}=\dfrac{(3-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\boxed{\dfrac{21-9i}{29}}$

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$

   $|z'|=1 \iff |\dfrac{z-2+i}{z+2i}|=1 \iff \dfrac{|z-2+i|}{|z+2i|}=1 \iff |z-2+i|=|z+2i| \iff$
   $AM=BM$ donc $\boxed{\text{M est sur la médiatrice de [AB]}}$

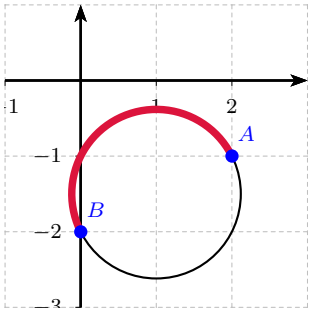
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

   $arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \iff \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. On cherche donc M tel que le triangle ABM soit rectangle en M . Donc M doit être sur le cercle de diamètre [AB] .

   Regardons si l'ensemble cherché est le cercle entier : $M\neq B$ car sinon le dénominateur de z' serait égal à 0 .

   $M\neq A$ car $arg(0)=0\neq\dfrac{\pi}{2}$

   Utilisons la figure pour mieux visualiser la situation :



   Si on place M sur le demi-cercle resté noir , alors $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ donc l'ensemble cherché est le demi-cercle rose privé de A et de B.

4. Montrer que $|z'-1|=\dfrac{\sqrt{5}}{|z+2i|}$

   $|z'-1|=|\dfrac{z-2+i}{z+2i}-1|=|\dfrac{z-2+i-z-2i}{z+2i}|=|\dfrac{-2-i}{z+2i}|=\dfrac{\sqrt{5}}{|z+2i|}$

5. En déduire que si M est sur un cercle de centre B et de rayon 1 , alors M' est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon .

   M est sur le cercle de centre B et de rayon 1 $\iff BM = 1 \iff |z + 2i| = 1$
   $\iff |z' - 1| = \sqrt{5} \iff IM' = \sqrt{5}$ avec I d'affixe 1 .

   $\boxed{\text{M' est donc sur le cercle de centre I et de rayon } \sqrt{5}}$

Enoncé pour les lions

1. On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = 8 - 6i$

   (a) Montrer que $a^2 - b^2 = 8$ et $ab = -3$

   On doit avoir $z^2 = 8 - 6i \iff (a + ib)^2 = 8 - 6i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 8 - 6i$ et en identifiant les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part , on obtient les égalités cherchées .

   (b) Montrer que $a^2 + b^2 = 10$

   $z^2 = 8 - 6i \Rightarrow |z|^2 = |8 - 6i| \Rightarrow a^2 + b^2 = 10$

   (c) En déduire z .

   $$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 2 \\ ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 1 \\ ab = -3 \end{cases} \text{ donc } \boxed{z = 3 - i} \text{ ou } \boxed{z = -3 + i}$$

2. Déterminer z tel que $z^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire les valeurs exactes de $cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et de $sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

   On raisonne comme précédemment , on doit donc résoudre le système :

   $$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4} \\ b^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ ab = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ ab = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ donc}$$

   $$\boxed{z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \text{ ou } \boxed{z = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

On remarque que $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$ et on sait de plus que $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et de même $sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc par ce qui précède : $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3. Déterminer z tel que $z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

   Commençons par déterminer le module de z : $|z^3| = |e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1 \iff |z|^3 = 1 \iff |z| = 1$

   Déterminons maintenant un argument de z :$3argz = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff argz = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

   Les solutions sont donc : $S = \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}$