DM 3

Enoncé pour les loups

On considère l'équation : $z^3 - z^2 + 2 = 0$ (E)

1. Déterminer a et b réels tels que $z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2 + az + b)$

   On va procéder par identification :

   $(z+1)(z^2+az+b) = z^3 + (1+a)z^2 + (a+b)z + b$ donc on doit avoir $\begin{cases} a & +1 = -1 \\ a+b & = 0 \\ b & = 2 \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ et on a donc :

   $\boxed{z^3 - z^2 + 2 = (z+1)(z^2 - 2z + 2)}$

2. En déduire la résolution de l'équation (E)

   On doit résoudre : $(z+1)(z^2-2z+2) = 0 \iff z+1 = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$. La première équation donne $z = -1$. On va résoudre la deuxième équation en calculant Δ .

   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4$ donc $z' = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z'' = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$.

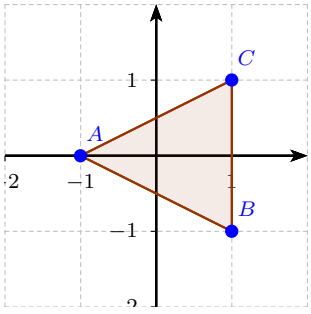
   $\boxed{S = \{-1; 1+i; 1-i\}}$

3. Mettre les solutions sous forme exponentielle

   $\boxed{-1 = e^{i\pi}}$;

   $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\boxed{1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Puisque $1+i$ et $1-i$ sont conjugués , on a $\boxed{1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

4. On note A , B et C les points d'affixes respectives -1 ,$1-i$ et $1+i$. Placer les points A , B et C dans un repère .



5. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier .

   Il semble que ABC soit isocèle en A . Calculons les longueurs pour le démontrer :

   $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $AC = |z_C - z_A| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ donc $AB = AC$ et ABC est bien isocèle en A

Enoncé pour les lions

On considère l'équation : $z^2 - 2(1+2cos\theta)z + 5 + 4cos\theta = 0$ (E) où θ désigne un réel quelconque . Le but de l'exercice est de résoudre (E) après avoir étudié quelques exemples particuliers .

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$

   $\Delta = -16$ donc $z' = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ et $z'' = 1 - 2i$. $S = \{1 + 2i; 1 - 2i\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

   $\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 4(5+2\sqrt{3}) = 16 + 8\sqrt{3} - 20 - 8\sqrt{3} = -4$ donc $z' = \dfrac{2(1+\sqrt{3}) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} + i$ et $z'' = 1 + \sqrt{3} - i$ donc $S = \{1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i\}$

3. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A , B , C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $1 + \sqrt{3} + i$, $1 + \sqrt{3} - i$ et $1 - 2i$.

   (a) Quelle est la nature de ABCD ?

   $z_{\overrightarrow{BC}} = -2i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -4i$ donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles donc ABCD est un trapèze .

   (b) Démontrer que (AB) et(BD) sont perpendiculaires .

   $\overrightarrow{AB}(\sqrt{3}; -1)$ et $\overrightarrow{BD}(-\sqrt{3}; -3)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -3 + 3 = 0$ donc $(AB) \perp (BD)$

   (c) Démontrer que A, B , C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon .

   Posons I le point d'affixe 1 . On calcule IA , IB , IC et ID et on remarque que ces quatre longueurs sont égales à 2 . Donc Γ est le cercle de centre I d'affixe 1 et de rayon 2

4. On revient au cas général où θ est un réel quelconque

(a) Résoudre (E)

$\Delta = 4(1+4cos^2\theta+4cos\theta)-20-16cos\theta = -16+16cos^2\theta = -16sin^2\theta$. On a donc les solutions $\frac{2+4cos\theta+4isi\theta}{2} = 1+2cos\theta+2isin\theta$ et son conjugué $1+2cos\theta-2isin\theta$. $\boxed{S = \{1+2cos\theta+2isin\theta; 1+2cos\theta-2isin\theta\}}$

(b) Montrer que les points ayant pour affixes les solutions de (E) appartiennent au cercle Γ

Appelons U le point d'affixe $1+2cos\theta+2isin\theta$ et V le point d'affixe $1+2cos\theta-2isin\theta$. Calculons IU et IV .

$IU = |2cos\theta+2isin\theta| = \sqrt{4cos^2\theta+4sin^2\theta} = 2$. De la même façon , $IV = 2$ donc U et V appartiennent bien à Γ