DM 2

Enoncé pour les loups

Exercice 1

1. *On donne la fonction f définie sur* $[0;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

   (a) *Etudier les variations de f*

   $f'(x)=\dfrac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{(x+2)^2}$. *Or* $f'(x)>0$. *On a donc :*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$		

   (b) *Montrer que pour tout* $x\in[0;1]$, *on a :* $0<f(x)<1$

   On a $f(0)=\dfrac{1}{2}$ *et* $f(1)=\dfrac{2}{3}$. *La fonction f est croissante donc on a si* $0<x<1$ *alors* $f(0)<f(x)<f(1)\iff\dfrac{1}{2}<f(x)<\dfrac{2}{3}$ *qui peut s'étendre à :* $0<\dfrac{1}{2}<f(x)<\dfrac{2}{3}<1$

2. *On donne la suite* (u_n) *définie par* $u_0=\dfrac{1}{2}$ *et* $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n+2}$.

   (a) *Montrer par récurrence que pour tout n ,* $0<u_n<1$

   Initialisation : $0<\dfrac{1}{2}<1$ *donc la propriété est vraie au rang* $n=0$

   Hérédité : supposons que $0<u_n<1$ *pour un rang n donné . On va montrer que* $0<u_{n+1}<1$.

   Par la question 1) , on sait que si $0<u_n<1$, *alors* $0<f(u_n)<1$ *donc* $0<u_{n+1}<1$.

   Conclusion : pour tout n , $0<u_n<1$.

   (b) *Montrer par récurrence que la suite* (u_n) *est croissante .*

   Initialisation : $u_0=\dfrac{1}{2}$ *et* $u_1=\dfrac{3}{5}$ *et on a bien* $u_0<u_1$

   Hérédité : Supposons $u_n<u_{n+1}$ *pour un rang n donné . On va montrer que* $u_{n+1}<u_{n+2}$.

La fonction f est croissante donc si $u_n < u_{n+1}$ *on a alors ,* $f(u_n) < f(u_{n+1})$ *donc* $u_{n+1} < u_{n+2}$.

Conclusion : on a pour tout n $u_n < u_{n+1}$ *et donc la suite est croissante .*

Exercice 2

On donne la suite (u_n) *définie par* $u_1 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

1. *Calculer les premiers termes de la suite*

   $u_2 = \dfrac{1}{2}$

   $u_3 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$

   $u_4 = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$

2. *Conjecturer l'expression de* u_n *en fonction de n*

   Il semble que $u_n = \dfrac{1}{n}$

3. *Démontrer la conjecture .*

   Initialisation : les calculs de la question 1) la démontre

   Hérédité : Supposons que pour un n donné , $u_n = \dfrac{1}{n}$. *Nous allons montrer que* $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ *donc* $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1}$ *en appliquant l'hypothèse de récurrence .*

   Donc $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{1}{n+1}$

   Conclusion : pour tout n , $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Enoncé pour les lions

Exercice 1

On donne la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n + n$

1. *Calculer les premiers termes de la suite*

   $u_1 = 0$; $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 6$

2. *Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n*

   Il semble que $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

3. *Démontrer la conjecture .*

   Initialisation : démontrée avec la question 1)

   Hérédité : supposons que pour un rang n donné , $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ *et montrons que* $u_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   On a : $u_{n+1} = u_n + n = \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n-1)+2n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   Conclusion : pour tout n , $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 2

En 2015 , Miguel a planté 20 orchidées dans son jardin . Grâce à la pollinisation , il sait que le nombre d'orchidées va doubler chaque année ; par ailleurs , il a décidé qu'il planterait lui-même 5 orchidées supplémentaires chaque année .

On considère la suite (p_n) donnant le nombre d'orchidées dans le jardin de Miguel en $2015 + n$. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n .

Commençons par exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . Le nombre double et on ajoute 5 orchidées donc : $p_{n+1} = 2p_n + 5$.

Etudions u_n : $u_{n+1} = p_{n+1} + 5 = 2p_n + 10 = 2(p_n + 5) = 2u_n$ *donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 25$ donc* $u_n = 25 \times 2^n$.

On a donc : $p_n = u_n - 5 = 25 \times 2^n - 5$