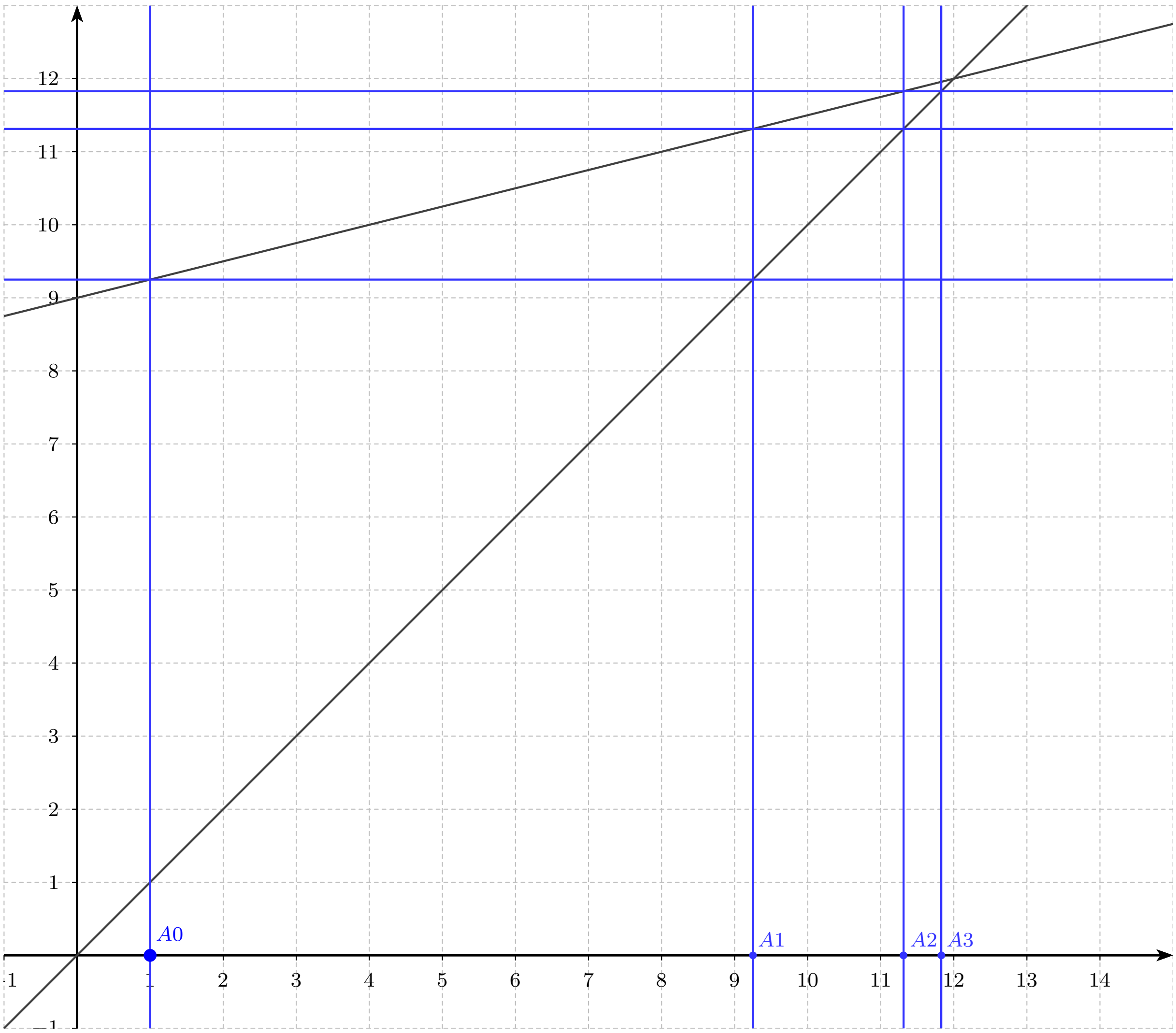
$\boxed{\text{DM 1}}$

Exercice 1

On définit la suite (u_n) *par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 9$

1. *Calculer les quatre premiers termes de cette suite . On a déjà* $u_0 = 1$*;* $u_1 = \frac{1}{4} \times 1 + 9 = \frac{37}{4}$ *;* $u_2 = \frac{1}{4} \times \frac{37}{4} + 9 = \frac{181}{16}$ *;* $u_3 = \frac{1}{4} \times \frac{181}{16} + 9 = \frac{757}{64}$

2. *On a tracé ci-dessous les droites d'équations* $y = x$ *et* $y = \frac{1}{4}x + 9$ *. Tracer sur l'axe des abscisses les points* A_0, A_1, A_2, A_3 *d'abscisses respectives* u_0, u_1, u_2, u_3 *en laissant les traits de constructions apparents .*



3. *Conjecturer le sens de variations de* (u_n) *et une éventuelle limite . Il semble que la suite est croissante et qu'elle tende vers 12 .*

4. *Montrer par récurrence que pour tout n , $u_n \leq 12$.*

   Initialisation : $u_0 = 1 \leq 12$ donc c'est vrai pour le rang 0

   Hérédité : Supposons que pour un rang n donné , on a $u_n \leq 12$. Nous allons montrer que $u_{n+1} \leq 12$.

   On a donc : $u_n \leq 12 \iff \frac{1}{4}u_n \leq 3 \iff \frac{1}{4}u_n + 9 \leq 12 \iff u_{n+1} \leq 12$

   Conclusion : On a donc montré que pour tout n , $u_n \leq 12$.

5. *Démontrer que la suite (u_n) est croissante .*

   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 9 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 9 = -\frac{3}{4}(u_n - 12)$.

   Or pour tout n , $u_n \leq 12$, donc $u_n - 12 \leq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est donc croissante .

6. *On pose $v_n = u_n - 12$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique .*

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \frac{1}{4}u_n + 9 - 12 = \frac{1}{4}u_n - 3 = \frac{1}{4}(u_n - 12) = \frac{1}{4}v_n$ *donc* $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$ *et la suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.*

7. *Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n .*

   On applique la formule : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -11 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   On a donc : $u_n - 12 = -11 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ *donc* $u_n = 12 - 11 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

8. *On donne l'algorithme suivant :*

```
Variables
u : réel
n , i : entiers
Début de l'algorithme
Saisir n
u prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n Faire
    u prend la valeur 1/4 u + 9
FinPour
Sorties :
Afficher u
```

   Que fait cet algorithme ? Il permet de calculer u_n pour n demandé à l'utilisateur .

Exercice 2

On donne la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 105x + 20$.

1. *Calculer la dérivée de f*

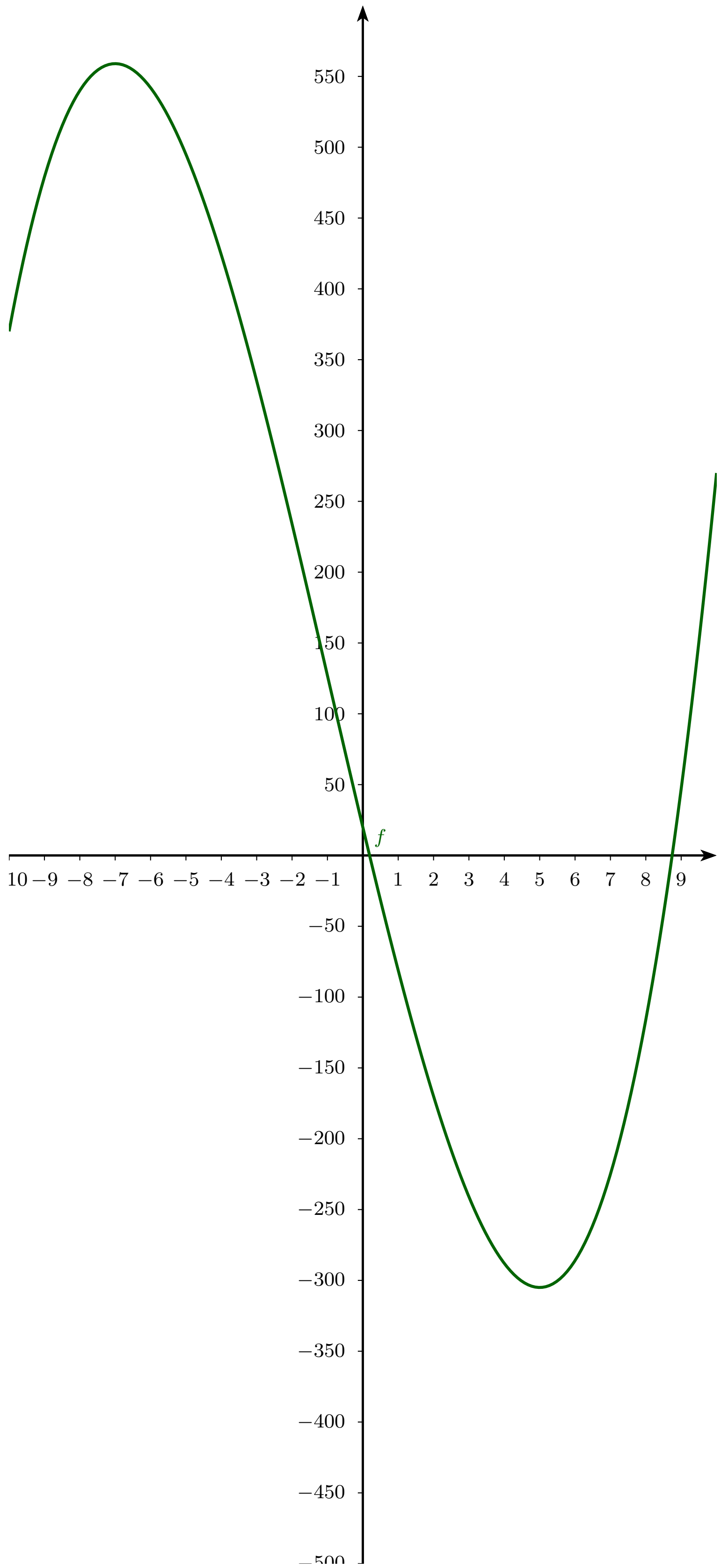
   $f'(x) = 3x^2 + 6x - 105$

2. *Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations .*

   On doit étudier le signe de la dérivée de f . Pour cela , calculons son discriminant .
   $\delta = 36 - 4 \times 3 \times (-105) = 1296 = 36^2$
   On a donc : $x' = \dfrac{-6-36}{6} = -7$ *et* $x'' = \dfrac{-6+36}{6} = 5$. *On a donc le tableau suivant :*

x	$-\infty$		-7		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	559	$\searrow$	-385	$\nearrow$	

3. *Tracer la courbe de f sur [-10;10] .*


550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
f
10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
−50
−100
−150
−200
−250
−300
−350
−400
−450
−500