DM 10

Enoncé pour les loups

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unités graphiques 2 cm .

1. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$*
2. *Etudier les variations de f*
3. *Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1*
4. *Tracer T et $\mathcal{C}$*
5. *On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Déterminer a , b et c tels que F soit une primitive de f .*
6. *Calculer en cm^2 l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$*

Exercice 2

On considère pour tout entier naturel non nul n , la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) e^{\frac{t}{n}}\, dt$

1. *On pose $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$*
   (a) *Etudier les variations de f sur [0;2]*
   (b) *En déduire un encadrement de f sur [0;2]*
   (c) *Montrer que $\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$*
   (d) *Montrer que si la suite (u_n) admet une limite L , alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$*
2. (a) *Montrer que $f(t) = 2 - \dfrac{1}{t+2}$ et en déduire la valeur de $I = \int_0^2 \left(\frac{2t+3}{t+2}\right) dt$*
   (b) *Montrer que $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ pour $t \in [0;2]$*
   (c) *En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite .*

Enoncé pour les lions

Exercice 1

1. *Calculer* $F(x) = \int_0^x sin^4 t \; dt$

2. *Résoudre* $F(x) = 0$

Exercice 2

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées sont continues sur I . Soient a et b deux réels de I .

1. *Montrer que pour tout réel x de I ,* $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$

2. *En déduire que* $\int_a^b u(x)v'(x) \; dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \; dx$ *. On a démontré la formule de l'intégration par parties .*

3. *Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :*

   (a) $I = \int_0^2 te^{-2t} \; dt$

   (b) $J = \int_1^5 lnt \; dt$

4. *En faisant deux intégrations par parties successives , calculer* $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 cost \; dt$