Corrigé du bac blanc

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 6 points

Partie A

1. La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point A (1 ; 0) donc $u(1) = 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par le point B (4 ; 0) donc $u(4) = 0$.
2. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^2}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}u(x)=a$$

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u(x)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}u(x)=a\end{array}\right\}\Longrightarrow a=1 \text{ donc } u(x)=1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$$
3. D'après la première question $u(1) = 0$ ce qui équivaut à $1+\dfrac{b}{1}+\dfrac{c}{1^2}=0 \iff b+c=-1$.

   De même $u(4)=0$ équivaut à $1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4^2}=0 \iff 1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \iff 4b+c=-16$.

   On résout le système $\left\{\begin{array}{rcr} b+c &=& -1\\ 4b+c &=& -16\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} c &=& -1-b\\ 4b-1-b &=& -16\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} c &=& 4\\ b &=& -5\end{array}\right.$

   Donc pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $u(x)=1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B

1. $f(x)=x-5\ln x-\dfrac{4}{x}=\dfrac{x^2-5x\ln x-4}{x}$. Par croissance comparée :

   $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0\\ \displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2-5x\ln x-4\right)=-4\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0^+\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^2-5x\ln x-4}{x}=-\infty$$

   donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$
2. $f(x)=x-5\ln x-\dfrac{4}{x}=x\left(1-5\dfrac{\ln x}{x}\right)-\dfrac{4}{x}$. Par croissance comparée :

   $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1-5\frac{\ln x}{x}\right)=1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}x\left(1-5\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0\end{array}\right\}$$

   $$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}x\left(1-5\frac{\ln x}{x}\right)-\frac{4}{x}=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$f'(x) = 1 - 5 \times \dfrac{1}{x} - 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2} = u(x)$

Un carré est toujours positif donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 5x + 4$. On calcule le discriminant : $\Delta = 9$, $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$. Puis on calcule $f(1) = -3$ et $f(4) = 3 - 5\ln 4 \approx -3,93$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x) = u(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3-5\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure ; c'est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $u(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Pour tout x de $[1\,;4]$, $u(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{A} = -\displaystyle\int_1^4 u(x)\mathrm{d}x$

$f'(x) = u(x)$ donc la fonction f est une primitive de la fonction u et donc $\displaystyle\int_1^4 u(x)\mathrm{d}x = f(4) - f(1)$.

On en déduit que $\mathscr{A} = f(1) - f(4) = -3 - (3 - 5\ln 4) = 5\ln 4 - 6$ unité d'aire.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que $4 \leqslant x \leqslant \lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant u(x)$.

Sur $[4\,;+\infty[$, $u(x) = f'(x) \geqslant 0$ et donc l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ est égale, en unité d'aire, à $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x = f(\lambda) - f(4)$; on cherche donc λ tel que $\displaystyle\int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A}$ ce qui équivaut à

$f(\lambda) - f(4) = 5\ln 4 - 6 \iff f(\lambda) - (3 - 5\ln 4) = 5\ln 4 - 6 \iff f(\lambda) = -3$

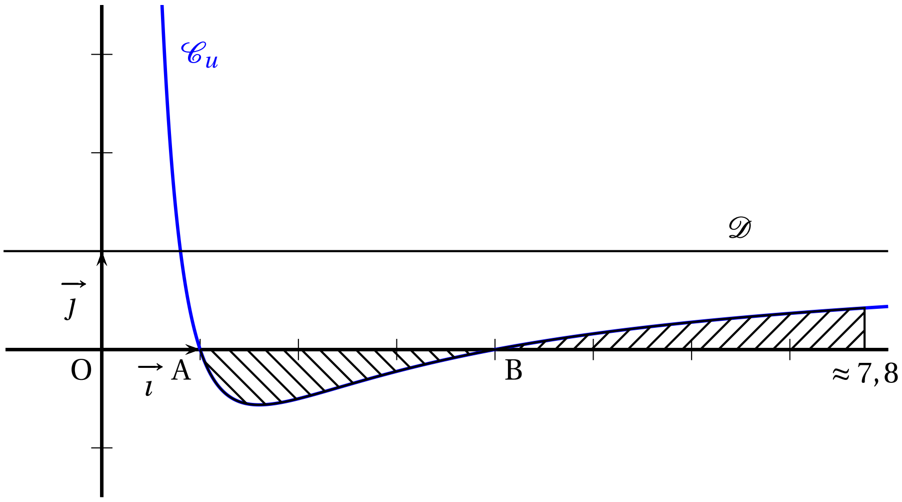
On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		4		λ		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3-5\ln 4 \approx -3,93$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue comme somme de fonctions continues et strictement croissante sur $[4\,;+\infty]$, de plus -3 est compris entre $3 - 5\ln 4 \approx -3,93$ et $+\infty$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur λ telle que $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.

Remarque : $f(7) \approx -3,30$ et $f(8) \approx -2,90$ donc $\lambda \in [7\,;8]$

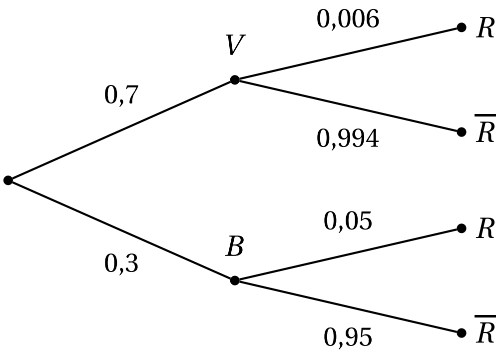
$f(7,7) \approx -3,03$ et $f(7,8) \approx -2,98$ donc $\lambda \in [7,7\,;7,8]$



EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

1.



2. D'après l'arbre ci-dessus $P\left(V \cap R\right) = 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}004\,2$.

3. D'après l'arbre ci-dessus, $P(R) = P\left(V \cap R\right) + P\left(B \cap R\right) = 0{,}004\,2 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}019\,2$.

4. $P_R\left(B\right) = \dfrac{P\left(B \cap R\right)}{P\left(R\right)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}05}{0{,}019\,2} \approx 0{,}781\,3$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer $P\left(15 \leqslant T \leqslant 20\right)$. À la calculatrice nous obtenons, $0{,}946\,0$.

2. Il sera en retard au lycée s'il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T \geqslant 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons $P\left(T \geqslant 20\right) = 0{,}006\,2$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $P\left(T \leqslant T_0\right) = 0{,}9$. À la calculatrice, nous obtenons $P\left(T \leqslant 18{,}5\right) \approx 0{,}9$. Ce qui signifie qu'il a une probabilité égale à $0,9$ de mettre moins de 18,5 minutes environ. Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 19 minutes à une minute près, c'est-à-dire 7 h 41 au maximum, de manière à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9.

Partie C : le bus

1. D'après le cours $Z' = \dfrac{T'-15}{\sigma'} = \dfrac{T'-\mu'}{\sigma'}$ suit une loi normale centrée-réduite.

2. Puisque $P\left(T' \geqslant 20\right) = 0{,}05$, il vient $P\left(\dfrac{T'-15}{\sigma'} \geqslant \dfrac{20-15}{\sigma'}\right) = 0{,}05 \iff P\left(Z' \geqslant \dfrac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}05$.
   À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z', on trouve que :
   $P\left(Z' \geqslant 1{,}645\right) = 0{,}05$ d'où $\dfrac{5}{\sigma'} = 1{,}645$ et donc $\sigma' = \dfrac{5}{1{,}645} = 3{,}04$ à 0,01 près.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$. Donc (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
3. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$ Faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
		Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.
2. $z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ et $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.
   Donc $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

   D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

EXERCICE 4 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3\times\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx 2{,}992\,19$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx 2{,}999\,97$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
   - Supposons la propriété vraie à un certain rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

     On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

     $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

     Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$, ainsi la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. **a.** Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$

   b. Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

   $$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \text{ et finalement } v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

   On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

   $x = -\dfrac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

   Mais on sait que $\ell \in [-1\,;0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

   Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.

La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

   a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3\,;4)$ est solution de (E).

   b. • Le couple $(x\,; y)$ est solution de (E) donc : $7 \times x - 5 \times y = 1$
   Le couple $(3\,; 4)$ est solution de (E) donc : $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$
   Par soustraction membre à membre : $7(x-3) - 5(y-4) = 0$
   donc $7(x-3) = 5(y-4)$.

   • Réciproquement, si le couple $(x\,; y)$ est tel que $7(x-3) = 5(y-4)$, on peut dire que $7(x-3) - 5(y-4) = 0 \iff 7x - 21 - 5y + 20 = 0 \iff 7x - 5y = 1$, et donc que le couple $(x\,; y)$ est solution de (E).

   • Donc le couple d'entiers $(x\,; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

   c. • Soit $(x\,; y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x-3) = 5(y-4)$.

   $7(x-3) = 5(y-4)$ entraîne que 7 divise $5(y-4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Comme $7(x-3) = 5(y-4)$ et $y-4 = 7k$, cela implique que $7(x-3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.

   Donc si $(x\,; y)$ est solution de (E), alors $\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

   • Réciproquement, si le couple d'entiers $(x\,; y)$ est tel que
   $\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k+3) - 5(7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$
   donc $(x\,; y)$ est solution de (E).

   • Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,; y)$ d'entiers relatifs tels que
   $\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.

   D'après la question **1**, on peut dire que $x = 5k+3$ et $y = 7k+4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.

   Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.

   Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.

   Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\dfrac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\dfrac{4}{25} = 016$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\dfrac{18}{25} = 0,72$.
On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n+1$ le pion soit en A.
S'il était en A à l'étape n, il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n, on retient $0,72a_n$.
S'il était en B à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n, on retient $0,12b_n$.
S'il était en C à l'étape n, il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n, on retient $0,12c_n$.
On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.
On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} & = & 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} & = & 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{array}\right.$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$$

soit $X_{n+1} = X_n T$ où $T = \begin{pmatrix}0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72\end{pmatrix}$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11}\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56\end{pmatrix}$

a. On sait que $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse de la matrice P^{-1} et on trouve : $P = \begin{pmatrix}1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) la propriété $\mathscr{P}_n$:
$T^n = PD^nP^{-1}$.

- *Initialisation* : on sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un naturel quelconque ($p \geqslant 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^pP^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p+1$.
  $T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^nP^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^pP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. La matrice D est une matrice diagonale ; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que $\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

a. $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = X_0 T^n \iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10}$.

$b_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$; or $-1 < 0,56 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,56^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$.

$c_n = 1 - a_n - b_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{37}{110} = \dfrac{4}{11}$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{10} = \dfrac{33}{110}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{37}{110}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{4}{11} = \dfrac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.