***Exercice 1***

Partie A

$$6^4 \equiv 1[5];\ 10^6 \equiv 1[7];\ 12^4 \equiv 6[10]$$

On peut penser que $a^{p-1} \equiv 1[p]$ si p est premier .

Partie B

1) On a :

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Si n et p sont premiers entre eux , alors par Gauss , n divise $\binom{n}{p}$

Si n est premier , puisque p < n , alors n et p sont premiers entre eux et par ce qui précède , n divise $\binom{n}{p}$

2) a) On a :

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k b^{p-k}$$

b) Or p divise $\binom{p}{k}$ donc p divise la somme et on a donc : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$[p]

c) On a :

$$((a+b)+c)^p \equiv (a+b)^p + c^p \equiv a^p + b^p + c^p[p]$$

3) a) L'initialisation est montrée par la question précédente

(HR) : $(a_1 + a_2 + \cdots a_n)^p \equiv {a_1}^p + \cdots {a_n}^p[p]$ au rang n

$$(a_1 + a_2 + \cdots a_n + a_{\text{n}+1})^p \equiv\ (a_1 + a_2 + \cdots a_n)^p + {a_{n+1}}^p \equiv {a_1}^p + \cdots + {a_n}^p + {a_{n+1}}^p[p]$$

b) On prend $a_i = 1$ et on obtient :

$$n^p \equiv n[p]$$

c) Supposons que p ne divise pas n alors n et p sont premiers entre eux . Or p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ et par Gauss , p divise donc $n^{p-1} - 1$

***Exercice 2***

$$1)\ \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}\ donc\ P(a) = (a-1)K$$

$$2)\ a^{561} - a = a[(a^2)^{280} - 1] = a(a^2 - 1)\sum_{k=0}^{279} a^{2k}$$

$$a^{561} - a = a[(a^{10})^{56} - 1] = a(a^{10} - 1)\sum_{k=0}^{55} a^{10k}$$

$$a^{561} - a = a[(a^{16})^{35} - 1] = a(a^{16} - 1)\sum_{k=0}^{34} a^{16k}$$

3) Par théorème de Fermat : $a^2 \equiv 1[3], a^{10} \equiv 1[11] et\ a^{16} \equiv 1[17]$ donc $a^{561} - a$ est divisible par 3 , 11 et 17

4) Par Gauss , $a^{561} - a$ est divisible par $3 \times 11 \times 17 = 561$

5) 561 vérifie bien $a^{561} - a$ divisible par 561

6) Réciproque du théorème de Fermat : si p divise $n^p - n$ alors p premier .

Cette réciproque est fausse puisque les nombres de Carmichaël sont non premiers et vérifient cette propriété .