

1 Généralités

Définition.

Une variable aléatoire est une fonction qui à chaque issue d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel .

Exemple.

On lance un dé équilibré à six faces . Si la face obtenue est un multiple de 3 , on marque 3 points , sinon on perd 1 point . On note X la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés . Il y a donc deux valeurs possibles pour X : 3 ou - 1 .

Définition.

L'événement $\{X = a\}$ est l'ensemble des issues associées au réel a .

L'événement $\{X \leq a\}$ est l'ensemble des issues associées à un réel inférieur ou égal à a

Exemple.

Dans l'exemple précédent , $\{X = 3\}$ est constitué des faces 3 et 6 ; il y a deux issues .

$\{X < 3\}$ correspond à toutes les autres faces , il est donc constitué de quatre issues .

Définition.

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X , la donnée des probabilités de toutes les valeurs possibles de X

Exemple.

Dans l'exemple précédent , déterminer la loi de probabilité de X :

x_i		
$p(X = x_i)$		

Propriété.

Soit x_i , $1 \leq i \leq n$ les valeurs possibles d'une variable aléatoire X. Alors $\sum_{k=1}^n p(X = x_k) = 1$

2 Espérance, variance , écart-type

Définition.

L'espérance d'une variable aléatoire X de valeurs x_i , $1 \leq i \leq n$ est le nombre $E(X)$ égal à :

$$\sum_{k=1}^n x_k p(X = x_k)$$



Astuce

L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire

Exemple.

Dans l'exemple précédent , calculer $E(X)$ et interpréter le résultat

Propriété.

L'espérance est linéaire c'est à dire que : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$ pour a réel

Définition.

- La variance d'une variable aléatoire X est le réel $V(X)$ égal à : $\sum_{k=1}^n (x_k - E(X))^2 p(X = x_k)$
- Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- L'écart-type d'une variable aléatoire X est le réel noté $\sigma(X)$ égal à $\sqrt{V(X)}$



Astuce

Plus l'écart type est grand , plus les valeurs de la variable aléatoire sont éloignées de l'espérance .

Exemple.

Dans l'exemple précédent , calculer la variance et l'écart-type .