

1 Projeté orthogonal

Définition.

Soit M un point du plan . On appelle projeté orthogonal de M sur la droite D le point M' de D tel que (MM') soit perpendiculaire à D

Propriété.

Soient M un point du plan et D une droite . Soit M' le projeté orthogonal de M sur D . La distance la plus courte de M à D est la distance MM' .

2 Produit scalaire

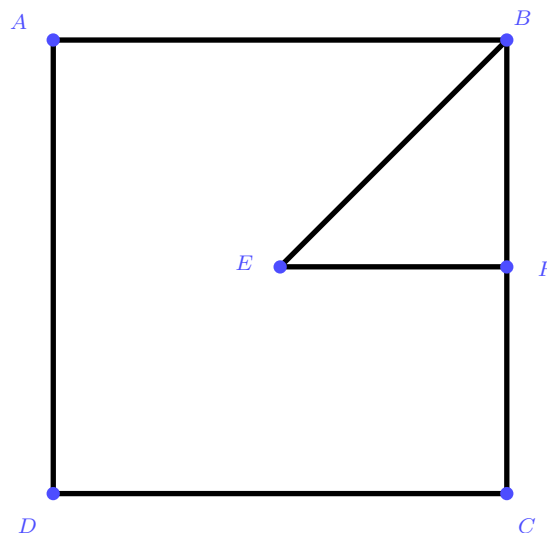
2.1 Définitions

Définition.

Soient A , B et C trois points du plan . On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le nombre réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exemple.

Soit $ABCD$ un carré de centre E tel que $AB = 6$ cm . Soit F le milieu de $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EC}$



Propriété.

Soient A , B et C trois points du plan . Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

Exemple.

Reprendre l'exemple précédent

Propriété.

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ définis dans une base orthonormée . Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple.

Soient $\vec{u}(4; 5)$ et $\vec{v}(-3; 2)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-3) + 5 \times 2 = -2$$

2.2 Propriétés du produit scalaire**Propriété.**

- Le produit scalaire est symétrique c'est à dire que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Le produit scalaire est bilinéaire c'est à dire :
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 - $k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

Propriété.

Soit $\vec{u}(x; y)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3 Applications du produit scalaire

3.1 Orthogonalité

Propriété.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété.

Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Exemple.

Les vecteurs $\vec{u}(-3; 4)$ et $\vec{v}(8; 6)$ sont ils orthogonaux ?

3.2 Norme de la somme de vecteurs



$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

A retenir

3.3 Formule d'Al-Kashi

Propriété.

Soit un triangle ABC. Alors : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\vec{AC}; \vec{BC})$

3.4 Lieux géométriques

Propriété.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$