L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1 – Automatismes (3 points)

1. $$3\sqrt{75}+7\sqrt{50}-9\sqrt{3}=3\times 5\sqrt{3}+7\times 5\sqrt{2}-9\sqrt{3}.$$

   Ainsi,

   $$\boxed{3\sqrt{75}+7\sqrt{50}-9\sqrt{3}=6\sqrt{3}+35\sqrt{2}}$$

2. Les points A, B et C sont alignés si les coefficients directeurs de (AB) et (AC) sont égaux.

   $$m_{(AB)}=\frac{-6-9}{12-7}=\frac{-15}{5}=-3.$$

   $$m_{(AC)}=\frac{1}{x-7}$$

   Donc il faut que : $1=-3(x-7) \iff x=\dfrac{20}{3}$

3. Une droite parallèle à la droite d'équation $y=2x-5$ a le même coefficient directeur, égal à 2. La droite cherchée a donc une équation de la forme $y=2x+b$. Comme elle passe par $A(8\,;7)$,

   $$7=2\times 8+b \quad\Longrightarrow\quad b=-9.$$

   Une équation de la droite D est donc

   $$\boxed{y=2x-9}.$$

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=2x^3-12x^2+23x-14.$$

1. (a) On cherche a, b et c tels que

   $$f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c).$$

   En développant,

   $$(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

   Par identification des coefficients avec $2x^3-12x^2+23x-14$, on obtient

   $$a=2, \qquad b-2a=-12, \qquad c-2b=23, \qquad -2c=-14.$$

   Ainsi, $a=2$, $b=-8$ et $c=7$. Donc

   $$\boxed{f(x)=(x-2)(2x^2-8x+7)}.$$

(b) Résolvons $f(x) \leq 0$. Les racines du trinôme $2x^2 - 8x + 7$ sont données par

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 8,$$

puis

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Posons

$$\alpha = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a $\alpha < 2 < \beta$. Le trinôme, de coefficient dominant positif, est positif sur $]-\infty\,;\alpha] \cup [\beta\,;+\infty[$ et négatif sur $[\alpha\,;\beta]$. En tenant compte du facteur $(x-2)$, le signe de f donne

$$\boxed{f(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty\,;\alpha] \cup [2\,;\beta].}$$

Autrement dit,

$$\boxed{x \in \left]-\infty\,;2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[2\,;2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].}$$

2. (a) La dérivée de f est

$$\boxed{f'(x) = 6x^2 - 24x + 23}.$$

(b) Résolvons $f'(x) < 0$. Le discriminant du trinôme $6x^2 - 24x + 23$ vaut

$$\Delta' = (-24)^2 - 4 \times 6 \times 23 = 24.$$

Ses racines sont

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{24}}{12} = 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Comme le coefficient dominant est positif, le trinôme est strictement négatif entre ses deux racines. Ainsi,

$$\boxed{f'(x) < 0 \iff x \in \left]2 - \frac{\sqrt{6}}{6}\,;\,2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right[.}$$

(c) L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Or $f(0) = -14$ et $f'(0) = 23$. Donc

$$\boxed{T :\ y = 23x - 14}.$$

(d) Pour comparer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T, étudions le signe de

$$f(x) - (23x - 14) = 2x^3 - 12x^2 = 2x^2(x - 6).$$

Comme $2x^2 \geq 0$, le signe de cette différence est celui de $x - 6$, sauf qu'elle s'annule également en $x = 0$. Ainsi :

- pour $x < 6$ et $x \neq 0$, $f(x) < 23x - 14$: la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T ;
- pour $x = 0$ et $x = 6$, la courbe et la droite se rencontrent ;
- pour $x > 6$, $f(x) > 23x - 14$: la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente T.

En $x = 0$, la droite est bien tangente à la courbe ; en $x = 6$, elles se coupent également.

Exercice 3 (9 points)
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 10.$$

1. Calculons les trois premiers termes :

$$u_1 = 3 \times 2 + 10 = 16,$$

$$u_2 = 3 \times 16 + 10 = 58,$$

$$u_3 = 3 \times 58 + 10 = 184.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_1 = 16, \qquad u_2 = 58, \qquad u_3 = 184}.$$

2. Pour qu'une suite soit arithmétique, ses différences consécutives doivent être constantes. Or

$$u_1 - u_0 = 16 - 2 = 14 \qquad \text{et} \qquad u_2 - u_1 = 58 - 16 = 42.$$

Ces différences étant différentes, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Pour qu'une suite soit géométrique, les quotients de termes consécutifs doivent être constants. Or

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{16}{2} = 8 \qquad \text{et} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{58}{16} = \frac{29}{8}.$$

Ces quotients étant différents, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 5$.

(a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = 3u_n + 10 + 5 = 3u_n + 15 = 3(u_n + 5) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3. Son premier terme est

$$v_0 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7.$$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison 3 et de premier terme } v_0 = 7.}$$

(b) Comme (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme 7,

$$\boxed{v_n = 7 \times 3^n}.$$

(c) Puisque $v_n = u_n + 5$, on a $u_n = v_n - 5$. Donc

$$\boxed{u_n = 7 \times 3^n - 5}.$$

(d) On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 6995$.

$$7 \times 3^n - 5 > 6995 \iff 7 \times 3^n > 7000 \iff 3^n > 1000.$$

D'après le tableau, $3^6 = 729 < 1000$ et $3^7 = 2187 > 1000$. Le plus petit entier vérifiant cette inégalité est donc

$$\boxed{n = 7}.$$