

Propriété utilisée dans tous les cas

Une similitude directe donnée sous la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 1$, a un unique point invariant : c'est son centre, pour angle $\arg(a)$ et pour rapport $|a|$.

Exemple de base

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tels que : $z' = (2 + 2i)z - 5 + 4i$

- Recherche du centre : on détermine les points invariants c'est-à-dire les points M qui vérifient $z = z'$:

$$z = (2 + 2i)z - 5 + 4i \Leftrightarrow z(-1 - 2i) = -5 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{-5 + 4i}{-1 - 2i} = \frac{-3 - 14i}{5}$$

- Recherche du rapport : c'est le module du coefficient de z

$$|2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

- Recherche de l'angle : c'est l'argument du coefficient de z

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Remarque : pour ceux qui auraient des difficultés pour définir un module ou un argument d'un nombre complexe, il y a une fiche méthode dans le chapitre « nombres complexes » sur ce site.

Cas particuliers des homothéties

Rappel important

Le rapport d'une similitude est toujours strictement positif.

Ce n'est pas le cas des homothéties

Exemple 1

Soit la transformation définie par : $z' = 3z + 5 - i$

Par le cours « obligatoire », on sait que c'est une homothétie de rapport 3 et de centre le point invariant :

$$z' = z \Leftrightarrow z = 3z + 5 - i \Leftrightarrow z(-2) = 5 - i \Leftrightarrow z = \frac{-5}{2} + \frac{i}{2} = c$$

Puisque son rapport est positif, on peut conclure directement que c'est une similitude directe de centre d'affixe c et de rapport 3.

<i>Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe</i>
--

Exemple 2

Soit l'homothétie de centre A d'affixe $1 - 4i$ et de rapport -5 . Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe correspondante.

Pour simplifier, passons à l'écriture complexe :

$$z' - (1 - 4i) = -5(z - 1 + 4i) \Leftrightarrow z' - (1 - 4i) = 5e^{i\pi}(z - 1 + 4i)$$

On est donc en présence d'une similitude directe de centre A de rapport 5 et d'angle .