Exercices sur les congruences

Exercice 1

Déterminer les congruences suivantes :

1) Modulo 5 des nombres suivants : 12 ; 45 ; 87 ; 12 ; 104
2) Modulo 7 des nombres suivants : 14 ; 85 ; 24 ; 46
3) Modulo 8 des nombres suivants : 12 ; 204 ; 36 ; 48

Exercice 2

Compléter la table de congruence suivante modulo 5

N	0	1	2	3	4
$2N^2$					

Compléter la table de congruence suivante modulo 7

N	0	1	2	3	4	5	6
3N – 5							

Compléter la table de congruence suivante modulo 4

N	0	1	2	3
$N^2 - 2N + 3$				

Exercice 3

1) Montrer que pour tout n entier naturel , $5n^3 + n$ est divisible par 6
2) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7 , alors $n^6 - 1$ est un multiple de 7
3) Montrer que pour tout entier naturel n , $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice 4

1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de : $12^{15}; 10^7; 78^{15}; 13^{12}$
2) Quel est le reste de la division euclidienne de 57383^{114} par 19
3) Quel est le reste de la division euclidienne de 91234^{2002} par 7 .

Exercice 5

Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 .

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes

$$3x \equiv 7[9]\;;\; 4t \equiv 2[5]\;;\; 2y \equiv 6[8]$$

Exercice 7

1) Déterminer le reste de 2 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 dans la division euclidienne par 7
2) En déduire une formule générale donnant le reste de 2^{3k} , 2^{3k+1}, 2^{3k+2} dans la division euclidienne par 7 (vous aurez donné le reste de 2^n)
3) En déduire le reste de 2^{55} dans la division par 7

Exercice 8

1) En vous inspirant de l'exercice 7 , donner le reste de 5^n dans la division euclidienne par 12
2) En déduire le reste de 5^{789} dans la division euclidienne par 12

Corrigé

Exercice 1

1) $12 \equiv 2[5]; 45 \equiv 0[5]; 87 \equiv 2[5]; 104 \equiv 4[5]$
2) $14 \equiv 0[7]; 85 \equiv 1[7]; 24 \equiv 3[7]; 43 \equiv 1[7]$
3) $12 \equiv 4[8]; 204 \equiv 4[8]; 36 \equiv 4[8]; 48 \equiv 0[8]$

Exercice 2

N	0	1	2	3	4
$2N^2$	0	2	3	3	2

Le suivant :

N	0	1	2	3	4	5	6
3N – 5	2	5	1	4	0	3	6

Le dernier :

N	0	1	2	3
$N^2 - 2N + 3$	3	2	3	2

Exercice 3

1) On va travailler modulo 6 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv$	0	1	2	3	4	-1
$5n^3 + n \equiv$	0	0	0	0	0	0

On a donc pour tout n , $5n^3 + n \equiv 0[6]$ donc 6 divise $5n^3 + n$

2) On va travailler modulo 7 : un nombre non divisible par 7 prend toutes les valeurs non nulles modulo 7

$n \equiv$	1	2	3	-3	-2	-1
$n^6 - 1 \equiv$	0	0	0	0	0	0

Car $2^3 = 8 \equiv 1[7]\ donc\ 2^6 = (2^3)^2 \equiv 1^2 \equiv 1[7]$ et de même pour les autres .

3) On va travailler modulo 6 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$n^2 + 5 \equiv$	5	0	3	2	3	0
$n(n^2 + 5) \equiv$	0	0	0	0	0	0

Exercice 4

1) On travaille modulo 11 :

$12 \equiv 1[11] donc\ 12^{15} \equiv 1[11]; 10 \equiv -1[11] donc\ 10^7 \equiv -1[11];$
$78 \equiv 1[11]\ donc\ 78^{15} \equiv 1[11]\ et\ enfin\ 13 \equiv 2[11], 13^2 \equiv 4[11],$
$13^6 = (13^2)^3 \equiv -2[11] donc\ 13^{12} \equiv (-2)^2 \equiv 4[11]$

Conclusion :

	12^{15}	10^7	78^{15}	13^{12}
Reste	1	-1	1	4

2) On travaille modulo 19 : $57\,383 = 19 \times 3020 + 3\ donc\ 57383 \equiv 3[19]$
On a donc : $3^2 \equiv -10[19];\ 3^6 \equiv -12 \equiv 7[19]\ et\ 3^{18} \equiv 1[19]$
Ce qui donne : $57383^{114} \equiv 3^{114} \equiv (3^{18})^6 \times 3^6 \equiv 7[19]$
Le reste cherché est donc 7 .

3) On travaille modulo 7 : $91234 = 7 \times 13033 + 3$ donc $91234 \equiv 3[7]$
On a donc : $3^2 \equiv 2[7]; 3^6 \equiv 1[7]$
Donc : $91234^{2002} \equiv 3^{2002} \equiv (3^6)^{333} \times 3^4 \equiv 4[7]$
Le reste cherché est donc 4 .

Exercice 5

On travaille modulo 7 : $3^2 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]$ donc :

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 2^n \times 3 + 4 \times 2^n \equiv 7 \times 2^n \equiv 0[7]$

Exercice 6

Exercices sur les congruences

$3x \equiv 7[9]$: On travaille modulo 9

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3x	3	3	6	0	3	6	0	3	6

Il n'y a pas de solution

$4t \equiv 2[5]$: on travaille modulo 5

t	0	1	2	3	4
4t	0	4	3	2	6

Les solutions sont donc t = 3 + 5k

$2y \equiv 6[8]$: on travaille modulo 8

y	0	1	2	3	4	5	6	7
2y	0	2	4	6	0	2	4	6

Les solutions sont donc y = 3 + 8k ou y = 7 + 8k

Remarquez en passant que si on avait divisé les congruences , on n'aurait gardé que la première solution !

Exercice 7

1) On travaille modulo 7 :

$2 \equiv 2[7]$; $2^2 = 4 \equiv 4[7]$; $2^3 = 8 \equiv 1[7]$; $2^4 = 16 \equiv 2[7]$; $2^5 = 32 \equiv 4[7]$; $2^6 = 64 \equiv 1[7]$

2) On remarque que :

$2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1[7]$; $2^{3k+1} = (2^3)^k \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2[7]$; $2^{3k+1} = (2^3)^k \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4[7]$

On peut aussi s'aider de la question 1 , en la présentant différemment :

Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste
1	2	4	2	7	2	3k + 1	2
2	4	5	4	8	4	3k + 2	4
3	1	6	1	9	1	3k	1

3) On a : $2^{55} = 2^{3\times 18} \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2[7]$

Exercice 8

1) On commence par chercher les restes dans la division par 12 de 5 , 5^2 , 5^3 … jusqu'à ce qu'on en trouve un congru à 1 modulo 12

$5 \equiv 5[12]$; $5^2 = 25 \equiv 1[12]$ (si ce n'est pas assez clair , on poursuit)

$5^3 = 125 \equiv 5[12]$; $5^4 = 625 \equiv 1[12]$ …

Les puissances paires de 5 ont donc un reste égal à 1 , et les puissances impaires ont un reste égal à 5 . On résume pour répondre proprement :

$5^{2k} \equiv 1[12]\ et\ 5^{2k+1} \equiv 5[12]$

2) 789 est une puissance impaire donc $5^{789} \equiv 5[12]$