Dénombrement

Nous allons voir ici comment raisonner pour utiliser les formules de dénombrement. La plupart du temps, vous pouvez aussi faire un arbre, mais il est intéressant de faire cette fiche sans cette aide.

Distinguer les différents cas

- Il faut d'abord déterminer si l'ordre est important ou non
- Puis regarder s'il y a remise ou non.

Exemples
Dans un tiercé, est-ce que l'ordre des chevaux compte ?
La réponse est oui donc (2 ; 8,3) est un cas différent de (8 ; 3 ; 2)

Quand vous avez des cartes dans les mains, la façon de les ranger change-t-elle votre jeu ?
La réponse est non (Valet cœur, dame trèfle, roi cœur) est le même cas que (roi cœur, valet cœur, dame trèfle)

Lorsque vous prenez cinq cartes et que vous les gardez, y a-t-il remise ? Non

La logique et le bon sens sont bien souvent suffisants pour comprendre la situation

Utiliser des combinaisons

S'il n'y a pas remise et que l'ordre est indifférent, on utilise les $\binom{n}{p}$

Exemple 1
Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs marqués « 0 », trois jetons rouges marqués « 7 », deux jetons blancs marqués « 2 » et un jeton rouge marqué « 5 »

1) On tire simultanément 4 jetons du sac. quel est le nombre de tirages possibles ?
2) On suppose que tous les tirages sont équiprobables et on considère les événements suivants : A : « les quatre numéros sont identiques », C : « tous les jetons sont blancs » et D : « tous les jetons sont de la même couleur ». Calculer p(C), p(D) et p(A)

Solution :

1) C'est choisir 4 jetons parmi 10 donc $\binom{10}{4} = 210$
2) Pour calculer p(C) : c'est avoir choisi les quatre jetons parmi les blancs qui sont 6

   donc p(C) = $\dfrac{\binom{6}{4}}{210} = \dfrac{15}{210} = \dfrac{3}{42}$.

   Pour calculer p(D) : c'est choisir 4 blancs parmi 6, ou 4 rouges parmi 4 donc

   p(D) = $\dfrac{\binom{6}{4}+\binom{4}{4}}{210} = \dfrac{16}{210} = \dfrac{8}{105}$

Pour calculer p(A) : pour avoir 4 jetons de même numéro, on ne peut choisir que les « 0 » donc p(A) = $\frac{1}{210}$

Exemple 2

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre noires. On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1) Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore
2) Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?
3) Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore ?
4) En déduire la probabilité d'un prélèvement tricolore

Solution :

1) Un prélèvement unicolore, c'est 4 boules rouges parmi les 4, ou 4 boules blanches parmi les 4 ou 4 boules noires parmi les 4. De plus, le nombre de tirages possibles c'est prendre 4 boules parmi les 12 d'où la formule : p (unicolore) = $\frac{3\times\binom{4}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{3}{495} = \frac{1}{165}$
2) Un tirage bicolore blanc –rouge c'est (1 blanc et 3 rouges) ou (2 blancs et 2 rouges) ou (3 blancs et 1 rouge).
   Donc p (bicolore br) = $\frac{\binom{4}{1}\times\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}\times\binom{4}{1}}{495} = \frac{68}{495}$
3) Les tirages bicolores sont soit blanc – rouge, soit blanc – noir, soit rouge – noir, le nombre de boules de chaque couleur étant identique, les raisonnements pour chaque tirage bicolore donneront le même résultat que la question 2) d'où
   p (bicolore) = $3\times\frac{68}{495} = \frac{68}{165}$
4) Un tirage tricolore, ce sont les tirages qui ne sont ni unicolores ni bicolores donc p (tricolore) = 1 – p (unicolore) – p (bicolore) = $1-\frac{1}{165}-\frac{68}{165} = \frac{96}{165} = \frac{32}{55}$

Dans les cas où les combinaisons ne s'appliquent pas

On essaie d'abord de raisonner

Exemple

15 chevaux prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il de tiercés possibles ?
Un tiercé, c'est trois chevaux
Pour le premier cheval, il y a 15 possibilités
Pour le deuxième, il n'y a plus que 14 chevaux possibles (celui qui a gagné ne fait demi-tour pour repasser la ligne d'arrivée !)
Pour le troisième, 13 chevaux possibles
Le nombre de tiercés est donc : $15\times14\times13 = 2730$

Et si ce n'est pas aussi simple, on peut s'aider de listes, de schémas, d'arbres …

Exercices

Exercice 1

Un jury de cour d'assisses est composé de 8 jurés tirés au sort parmi 40 noms. Combien de jurys peut-on constituer ?

Exercice 2

Un club compte 80 adhérents en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque adhérent pratique un seul sport. On choisit au hasard trois adhérents de ce club.

1) Quelle est la probabilité que les 3 personnes choisies pratiquent la natation ?
2) Quelle est la probabilité que les trois personnes choisies pratiquent le même sport ?

Exercice 3 (bac)

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On tire au hasard une boule du sac, on note x son numéro et on la remet dans le sac. On tire une seconde boule du sac, on note y son numéro, on la remet également dans le sac.
A chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan muni d'un repère orthonormal de centre O le point M de coordonnées $(x ; y)$
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe $OM^2 = x^2 + y^2$

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Soit D le disque de centre O et de rayon 1,7. Déterminer la probabilité de l'événement « M est dans le disque D »
3) On tire cinq fois de suite et de façons indépendantes, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un de ces points est dans le disque D » ?
4) On répète n fois de suite et de façon indépendante le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan. Calculer la valeur minimale de n telle que la probabilité qu'il y ait au moins un point appartenant au disque D soit supérieur à 0, 999 9.