Corrigé variations de la fonction logarithme népérien

Exercice 1

1) $f(x) = x\ln x$; f '(x) = $\ln x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; f '(x) = $\dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

3) $f(x) = (\ln x)^4$; f '(x) = $4\dfrac{1}{x}(\ln x)^3$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; f '(x) = $-\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

5) $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$; f '(x) = $\dfrac{\frac{1}{x}(\ln x + 1) - \frac{1}{x}(\ln x - 2)}{(\ln x + 1)^2} = \dfrac{3}{x(\ln x + 1)^2}$

6) $f(x) = (x+1)(\ln x)^2$; f '(x) = $\ln^2 x + (x+1)\left(2\dfrac{1}{x}\ln x\right) = \dfrac{\ln x(x\ln x + 2x + 2)}{x}$

7) $f(x) = \ln(x^3)$; f '(x) = 3x² $\times \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{3}{x}$

8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-9}\right)$; f '(x) = $\dfrac{x-9-x-2}{(x-9)^2} \times \dfrac{x-9}{x+2} = \dfrac{-11}{(x-9)(x+2)}$

9) $f(x) = \ln\sqrt{3-x} = \dfrac{1}{2}\ln(3-x)$; f '(x) = $\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)}{3-x} = -\dfrac{1}{2(3-x)}$

10) $f(x) = \ln(\ln x)$; f '(x) = $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln x}$; formule f(u(x))

Exercice 2

1) $\ln x = 0$ si x = 1

2) $\ln x = -2$ si x = e^{-2} car $e^{\ln x} = x$

3) $\ln(3-2x) = 1$ équivaut à 3 – 2 x = e car $e^{\ln x} = x$ et la fonction e^x est strictement croissante donc x = $\dfrac{3-e}{2}$

4) $\ln x = -\dfrac{2}{3}$ si x = $e^{-\frac{2}{3}}$ car $e^{\ln x} = x$

5) $\ln(x^2 - 4) < 0$ équivaut aux lignes suivantes :
$e^{\ln(x^2-4)} < e^0$ car la fonction e^x est strictement croissante
x² - 4 < 1 car $e^{\ln x} = x$
$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) < 0$ S = $]-\sqrt{5};\sqrt{5}[$

6) $\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) - 3 < 0$ équivaut aux lignes suivantes :
$\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) < 3$
$\dfrac{1+x}{x} < e^3$ car la fonction e^x est strictement croissante et car $e^{\ln x} = x$

$$\frac{1+x-xe^3}{x}<0$$

$$\frac{1+(1-e^3)x}{x}<0 \qquad S = \left]0;\frac{1}{e^3-1}\right[$$

7) $\ln x - 2 \geq 0$ équivaut aux lignes suivantes :
$\ln x \geq 2$
$x \geq e^2$ car la fonction e^x est strictement croissante et car $e^{\ln x} = x$
$S = [e^2;+\infty[$

8) $\ln(3x-1) = \ln(5x-2)$ équivaut aux lignes suivantes
3x – 1 = 5x – 2 car la fonction e^x est strictement croissante et car $e^{\ln x} = x$
$x = \frac{1}{2}$

9) $\ln(3x+2) \leq \ln(x-5)$ équivaut aux lignes suivantes
$3x + 2 \leq x - 5$ car la fonction e^x est strictement croissante et car $e^{\ln x} = x$
$x \leq -\frac{7}{2}$ $\qquad S = \left]-\infty;-\frac{7}{2}\right]$

10) $\ln(x^2-16) \geq \ln 2x$ équivaut aux lignes suivantes
$x^2 - 16 \geq 2x$ car la fonction e^x est strictement croissante et car $e^{\ln x} = x$
$x^2 - 2x - 16 \geq 0$ $\quad \Delta = 4 + 64 = 68$ $\quad S = \left]-\infty;1-\sqrt{17}\right] \cup \left[1+\sqrt{17};+\infty\right[$

11) $(2x-3)\ln(x+1) > 0$.
Etudions d'abord le signe de ln (x + 1) : cette fonction est définie sur $[-1;+\infty[$ on travaillera sur cet ensemble . ln (x + 1) > 0 si x + 1 > 1 donc si x > 0 . On a alors le tableau de signes suivants :

x	- 1		0		$\frac{3}{2}$		+ ∞
2x – 3		-		-	0	+	
ln (x + 1)		-	0	+		+	
P		+	0	-	0	+	

$S =]-1;0[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

12) $\ln(\ln x) > 0$ équivaut aux lignes suivantes
ln x > 1
x > e $\qquad S =]e;+\infty[$

Exercice 3

1) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$. On pose X = ln x d'où l'équation $X^2 - 3X - 4 = 0$; $\Delta = 25$
donc X' = 4 et X'' = - 1 ; donc $x' = e^4$ et $x'' = e^{-1}$

2) $(\ln x)^2 - \ln x - 30 = 0$: $X^2 - X - 30 = 0$; $\Delta = 121$, X' = 6 et X'' = - 5 donc $x' = e^6$ et $x'' = e^{-5}$.

3) $(\ln x)^2 + 3\ln\frac{1}{x} - 10 = 0$ équivaut à $(\ln x)^2 - 3\ln x - 10 = 0$: $X^2 - 3X - 10 = 0$; $\Delta = 49$
X' = 5 et X'' = - 2 donc $x' = e^5$ et $x'' = e^{-2}$

4) $2(\ln x)^3 - 9\ln^2 x - 6\ln x + 5 = 0$: $2X^3 - 9X^2 - 6X + 5 = 0$, on remarque que X = - 1 est solution donc l'équation devient : (X + 1) (2 X² - 11 X + 5) = 0 ; Δ = 81 , X' = 5 et X'' = $\frac{1}{2}$. D'où S = $\left\{\frac{1}{e}; e^5; \sqrt{e}\right\}$

5) $2\ln^2 x - 3\ln x - 5 \leq 0$: 2X² - 3X – 5 ≤ 0 ; Δ = 49 X ∈ $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ et donc x ∈ $\left[\frac{1}{e}; e^{\frac{5}{2}}\right]$

6) $2\ln^2 x + \ln x - 6 > 0$: 2 X² + X – 6 > 0 ; Δ = 49 , X ∈ $\left]-\infty; -2\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et donc

$x \in \left]-\infty; e^{-2}\right[\cup \left]e^{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

7) $\ln^2 x - 5\ln x \geq 0$ équivaut à : ln x (ln x – 5) ≥0 . On travaille sur $]0;+\infty]$. Voici le tableau de signes :

x	0		1		e^5		+ ∞
ln x		-	0	+		+	
ln x – 5		-		-	0	+	
P		+	0	-	0	+	

S = $]0;1] \cup [e^5; +\infty[$

8) $7\ln^3 x + 8\ln^2 x + 9\ln x \geq 0$; 7 X^3 + 8 X² + 9X ≥ 0 équivaut à X (7 X² + 8X + 9) ≥0 .
Δ = - 188 donc 7 X² + 8X + 9 > 0 et donc $X \in [0; +\infty[$ et donc x ∈ $[1; +\infty[$

Exercice 4

La fonction f(x) = $\ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1) La fonction f est définie si $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ or X² - X + 1 > 0 car Δ = - 3 < 0 donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + 1 = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$ et $\lim_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation y = 0

2) f '(x) = $\frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$ est du signe de 2 e^x – 1 d'après 1) .

Résolvons $2e^x - 1 \geq 0$ équivaut aux lignes suivantes :

$e^x \geq \frac{1}{2}$

$x \geq \ln\frac{1}{2}$ car la fonction ln x est strictement croissante et ln e^x = x .

Donc , f est croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$.

3) Calculons f(x) – y =

$\ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x = \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right) - 2x = \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

Or $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} + e^{-2x} = 1$ et ln 1 = 0 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=0$ et la droite d'équation y = 2x est bien asymptote à la courbe .

Pour étudier la position relative de la droite et de la courbe , il faut regarder le signe de $\ln\left(1-e^{-x}+e^{-2x}\right)$.

Or $\ln\left(1-e^{-x}+e^{-2x}\right)$ > 0 équivaut aux lignes suivantes

$1-e^{-x}+e^{-2x}>1$

$e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)>0$ or $e^{-x} > 0$

$e^{-x}>1$

x < 0 car la fonction exponentielle est strictement croissante . Donc sur $\left]-\infty;0\right]$ la courbe est au dessus de son asymptote et sur $\left[0;+\infty\right[$ la courbe est en dessous de son asymptote .

Exercice 5

1) Soit f(x) = $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{3+x}{3-x}=0^+$ et $\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3+x}{3-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$.

La courbe de f admet deux asymptotes verticales d'équation x = 3 et x = - 3

2) f '(x) = $\dfrac{3-x+3+x}{(3-x)^2}\times\dfrac{3-x}{3+x}=\dfrac{6}{(3-x)(3+x)}$ > 0 sur le domaine de définition donc la fonction f est croissante sur] – 3 ; 3 [.

3) Montrons que la fonction f est impaire :

$$f(-x)=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=\ln(3-x)-\ln(3+x)=-\left[\ln(3+x)-\ln(3-x)\right]=-\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=-f(x)$$

et le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0 donc f est impaire et l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 6

1) Soit f(x) = $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$ et ln 1 = 0 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 .

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=+\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ et la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = 0 .

2) f '(x) = $\dfrac{x-x-1}{x^2}\times\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ < 0 sur $\left]0;+\infty\right[$. Donc f est décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$

Exercice 7

1) Soit f(x) = $x-1+\dfrac{\ln x}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0} x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{2}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et la courbe de f admet une asymptote verticale , la droite d'équation x = 0 .

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) f '(x) = $1+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x+1}{2x}$ > 0 sur $]0;+\infty[$ donc f est croissante sur $]0;+\infty[$

3) f est une fonction continue comme somme d'un polynôme et d'une fonction logarithme népérien , f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et 0 est dans l'intervalle image de $]0;+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe une unique solution a dans $]0;+\infty[$ de l'équation f(x) = 0 . a = 1 .

Exercice 8

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)(0)=1=f(0)$ (on a utilisé la formule du nombre dérivé de la fonction ln (x + 1)) . Donc f est continue en 0

2) Commençons par étudier le signe de la fonction g(x) = $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3$.

Pour cela , nous allons étudier les variations de g :

g'(x) = $\dfrac{1}{1+x}-1+x-x^2=\dfrac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x}=-\dfrac{x^3}{1+x}$ < 0 si x > 0 . Donc g est décroissante et g(0) = 0 donc g(x) ≤ 0 d'où : $\ln(1+x)-x\le-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$.

Comme x^2 > 0 alors : $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}x$.

Maintenant , étudions le signe de h(x) = $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$; h'(x) =

$\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$ > 0 , h(0) = 0 donc h(x) ≥ 0

et $\ln(1+x)-x\ge-\dfrac{1}{2}x^2$ et puisque x^2 > 0 , on obtient : $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ge-\dfrac{1}{2}$.

Etudions maintenant la dérivabilité de f en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ et par l'encadrement précédent , en utilisant le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ donc la fonction f est dérivable en 0 et f '(0) = $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 9

1) Faux : f(x) = 3 e^x est aussi solution .
2) Vrai : f'(x) = 5 e^x = f(x)
3) Faux : par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^4}=+\infty$
4) Vrai par croissance comparée

5) Vrai car $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

6) Vrai car $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

7) Faux : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \times \frac{1}{5} = (2e^{2x})(0) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ (nombre dérivé de e^{2x})

8) Faux : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} \times \frac{2}{5} - \frac{1}{5x} = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ par croissance comparée .

9) Vrai car $e^u > 0$

10) Vrai : $e^{2x} - 4 = (e^x - 2)(e^x + 2) = 0$ et $e^x + 2 > 0$ donc $e^x = 2$ si $x = \ln 2$

11) Vrai car la fonction exp est strictement croissante

12) Vrai car $e^u > 0$

13) Faux : la dérivée de $4e^{-2x+5}$ est $-8e^{-2x+5}$

14) Faux : la dérivée de $(e^x)^2$ est $2\, e^x\, e^x = 2\, (e^{2x})$

15) Vrai : $e^{2x} = 1 = e^0$ si $x = 0$

16) Vrai : pour que la première existe , il faut que la deuxième existe aussi .