La formule de Wallis

Soit n un entier naturel . On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .
2) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que , pour tout n ≥ 2 , on a :
   $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (1) .
3) En déduire I_2 , I_3 , I_4 et I_5 .
4) a) Démontrer par récurrence que : pour $n \geq 1$ on a : $I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n} \times \frac{\pi}{2}$.

   b) pour $n \geq 1$, on a : $I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}$
5) a) Pour x $\in [0;\frac{\pi}{2}]$, comparer $\sin^n x$ et $\sin^{n+1} x$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante .

   b) A l'aide de l'égalité (1) , établir alors l'encadrement : $\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$, pour $n \geq 1$.

   c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.
6) Démontrer la formule de Wallis : si on pose $w_n = \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2n+1}$

   pour $n \geq 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.