Corrigé sommes trigonométriques

1) $1-e^{ia}=e^{i\frac{a}{2}}(e^{-i\frac{a}{2}}-e^{i\frac{a}{2}})=-2ie^{i\frac{a}{2}}\sin(\frac{a}{2})$

2) a) $x\neq 2k\pi$ donc $e^{ix}\neq 1$;
C_n +i S_n = 1 + cos x + i sin x + cos 2x + i sin 2x +… + cos nx + i sin nx .
on a donc C_n +i S_n = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + … + e^{inx} ; c'est la somme des (n+1) termes d'une suite géométrique de raison e^{ix} d'où la formule .
b)on a donc C_n +i S_n =

$$\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{-2i\sin\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}}=\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2})$$ par la question 1) et

en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient les formules souhaitées .

3) si x = $\frac{\pi}{n}$, alors $\cos\frac{nx}{2}=\cos\frac{n\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2}=0$ donc C_n = 0 .

S_n = $\frac{\sin(\frac{(n+1)\pi}{2n})}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}=0$ donc on

a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}=1$ c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}n\sin\frac{\pi}{2n}=1$ autrement dit $\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$ on a

donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2}{\pi}$.

4) $e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{i(n-k)\frac{\pi}{n}}=e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\pi}e^{-i\frac{k\pi}{n}}=e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}=2i\sin\frac{k\pi}{n}$ imaginaire pur . on a C_n + i S_n = 1 + $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{i(n-k)\frac{\pi}{n}}+e^{i\pi}$ qui est donc imaginaire pur et par identification des parties réelles : C_n = 0 . b) on obtient la formule somme en remplaçant simplement x par $\frac{\pi}{n}$. on a : $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ est la somme des rectangles situés sous la courbe de f et donc la limite de cette somme tend vers l'aire sous la courbe de f c'est à dire l'intégrale donnée . calculons cette intégrale : I = $\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$.