Résolution d'équations différentielles du premier ordre

Les équations que l'on sait résoudre

En terminale, deux types seulement d'équations différentielles sont résolubles directement
La première y' = ay + b et la deuxième y' = ay avec a et b des **réels.** Il ne faut donc pas appliquer ces formules avec n'importe quoi !
Si l'exercice commence par un autre type d'équation différentielle, les questions successives vont permettre de la résoudre à la fin de l'exercice, donc pas de précipitation.

- Commencer par surligner dans l'énoncé les équations que l'on sait résoudre.

Formules

Les solutions de l'équation différentielle y' = ay sont de la forme $y = ke^{ax}$ avec k réel

Les solutions de l'équation différentielle y' = ay + b sont de la forme $y = -\frac{b}{a} + ke^{ax}$ avec k réel

Exemples

L'équation différentielle y' = 3y – 8 a pour solution $y = \frac{8}{3} + ke^{3x}$ avec k réel.

L'équation différentielle y' = 3y + x ne peut pas être résolue avec les formules.

Changement de variable

Pour passer d'une équation que l'on ne sait pas résoudre à une équation type, on procède par changement de variable et on prouve l'équivalence entre deux équations différentielles. Pour cela , commencer par exprimer la dérivée de l'une des variables en fonction de l'autre puis remplacer dans une équation différentielle pour retrouver l'autre équation différentielle

Exemple

Soit l'équation différentielle y' + y = x + 1 (E1)
On pose z = y – x. Montrer que z est solution de z' + z = 0 (E2)

Solution

Commençons par calculer y en fonction de z : y = z + x
Calculons la dérivée de y : y' = z' + 1
Remplaçons dans (E1) : z' + 1 + z + x = x + 1
On simplifie : z' + z = 0
On a bien (E2)

Déterminer toutes les solutions d'une équation inconnue

Il faut se servir des questions précédentes

Exemple

Le but est de résoudre : 2y' + 3y = x² + 1 (E1)

1) Montrer que la fonction f telle que f(x) = $\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} + \frac{17}{27}$ est solution de (E1)
2) Montrer que g + f est solution de l'équation (E1) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle (E2) : 2y' + 3y = 0
3) En déduire toutes les solutions de (E1)

Solution

1) Pour montrer que f est solution de (E1), on va remplacer y par f et vérifier que l'égalité reste vraie :

   2f '(x) + 3f(x) = $2\left(\frac{2x}{3}-\frac{4}{9}\right)+3\left(\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{9}+\frac{17}{27}\right)=\frac{4x}{3}-\frac{8}{9}+x^2-\frac{4x}{3}+\frac{17}{9}=x^2+1$

   Donc f est solution de (E1)

2) On suppose que g + f est solution de (E1). Ceci équivaut aux lignes suivantes :
   2(g + f)' + 3(g + f) = x^2 + 1
   2g' + 3g + 2f' + 3f = x^2 + 1
   2g' + 3g = 0 car par la question 1) 2f' + 3f = x^2 + 1
   On a donc bien g solution de (E2)

3) Puisque g est solution de (E2) alors g est solution de $y'=-\frac{3}{2}y$ et donc g = $ke^{-\frac{3}{2}x}$ avec k réel.
   De plus, on dit dans la question précédente que les solutions de (E1) sont de la forme g + f, or on connaît ces deux fonctions, donc les solutions de (E1) sont :
   $\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{9}+\frac{17}{27}$ + $ke^{-\frac{3}{2}x}$ avec k réel.

Tous les exercices d'équations différentielles ont la même articulation : à vous de vous entrainer pour la dominer

Exercices

Exercice 1

Résoudre

1) $y'=-2y$	2) $3y'-2y=0$	3) $-y'+0{,}1y=0$

Exercice 2

Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

1) $3y'+5y=0$ et f (-1) = 0
2) $2y-4y'=0$ et f '(1) = 1
3) $y'=-5y+1$ et f(1) = 0
4) $2y'+y=3$ et f '(0) = 1
5) $y'=-3y+5$ et f(0) = 0

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle : $y'=y(1-y)$. On pose $z=\frac{1}{y}$.

Montrer que z est solution de l'équation différentielle (E') : $z'=-z+1$.
Résoudre (E') puis (E).

Exercice 4

Soit (E) l'équation différentielle $y'+2y=\cos x$.

Montrer que g(x) = $0{,}4\cos x+0{,}2\sin x$ est solution de (E).

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f – g est solution de l'équation différentielle (E') : y' + 2y = 0

En déduire les solutions de (E).

<u>Exercice 5 (bac)</u>

On considère l'équation différentielle (E1) : $y'-2y=e^{2x}$

1) Démontrer que la fonction f(x) = xe^{2x} est solution de (E1)
2) Résoudre l'équation différentielle (E2) : $y'-2y=0$
3) Montrer qu'une fonction g est solution de (E1) si et seulement si g – f est solution de (E2)
4) En déduire toutes les solutions de (E1)
5) Déterminer la fonction solution de (E1) qui prend la valeur 1 en 0.